

Titre: Adaptation anisotrope pour maillages d'éléments d'ordre élevé
Title:

Auteur: Arthur Bawin
Author:

Date: 2018

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Bawin, A. (2018). Adaptation anisotrope pour maillages d'éléments d'ordre élevé
Citation: [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
<https://publications.polymtl.ca/3245/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/3245/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** André Garon, & Dominique Pelletier
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ADAPTATION ANISOTROPE POUR MAILLAGES D'ÉLÉMENTS D'ORDRE ÉLEVÉ

ARTHUR BAWIN
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
AOÛT 2018

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ADAPTATION ANISOTROPE POUR MAILLAGES D'ÉLÉMENTS D'ORDRE ÉLEVÉ

présenté par : BAWIN Arthur

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., président

M. GARON André, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. ÉTIENNE Stéphane, Doctorat, membre

DÉDICACE

À ma famille

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement André Garon pour son temps et ses conseils. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler à ses côtés, et malgré une période d'absence, il était toujours disponible pour une conversation constructive, pour prendre du recul ou pour m'indiquer gentiment que son code fonctionnait et pas le mien. Merci pour cela.

Je remercie évidemment Dominique Pelletier, mon codirecteur de recherche, pour ses conseils avisés et pour les discussions par rapport aux estimateurs d'erreur.

J'aimerais remercier également Ricardo Camarero et Stéphane Étienne d'avoir pris le temps d'analyser mon travail, ainsi que d'avoir accepté de faire partie du jury.

Pour le temps qu'il m'a consacré, je tiens à remercier Marc Laforest, qui a toujours sa porte ouverte pour une discussion ou une explication.

Je tiens à remercier mes camarades de fortune, Guillaume Emond et Pascal Boulos, tout particulièrement pour leur aide lors de la prise en main du code d'éléments finis. Je les remercie pour leur bonne humeur quotidienne, ainsi que pour les conversations partagées, toujours passionnantes et parfois pertinentes. Pour les relectures effectuées, je remercie également Danika Couture-Peck, dernière arrivée dans le bureau.

Enfin, je remercie ma famille pour leur soutien et leurs encouragements. J'aimerais adresser une pensée affectueuse à Sarah, pour son aide et son enthousiasme, pour m'avoir supporté et m'avoir écouté monologuer sur mes ellipses tout au long de l'année. Je remercie finalement sa famille et ses amis, pour leur accueil chaleureux lors de mon arrivée au Québec.

Merci à tous ceux que j'ai oubliés, et qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

RÉSUMÉ

Dans le cadre de la simulation par éléments finis, l'utilisation de maillages anisotropes permet d'atteindre des niveaux de précision souvent inégalés par ceux des maillages isotropes classiques, tout en diminuant considérablement le nombre de degrés de liberté du problème. Cette diminution de la taille du système linéaire entraîne des gains importants en termes de mémoire et de temps de calcul. En permettant l'étirement des éléments selon certaines directions privilégiées, les maillages adaptés s'ajustent aux caractéristiques du domaine de calcul et de la solution du problème différentiel. Si leur utilisation pour des éléments linéaires est maintenant répandue, l'adaptation anisotrope pour des maillages d'ordre élevé est encore rare, principalement à cause de la perte de lien entre l'erreur d'interpolation et l'écriture du tenseur métrique. Ce mémoire présente une méthodologie de calcul de champs de tenseurs métriques, utilisables pour la génération de maillages d'éléments anisotropes munis de fonctions d'interpolation d'ordre supérieur à un. Les maillages sont obtenus comme le minimisant de l'erreur d'interpolation sur le domaine de calcul. La littérature récente dans ce domaine traitant principalement d'adaptation sur des champs analytiques, on se propose d'appliquer cette méthodologie à des maillages d'éléments de Taylor-Hood pour la simulation d'écoulements simples en mécanique des fluides. En particulier, des maillages anisotropes sont présentés pour les problèmes de cavité entraînée et de marche descendante en deux dimensions.

Le concept de maillage continu sert de passerelle entre le maillage discret, support du calcul par éléments finis, et les outils continus que sont l'optimisation et le calcul tensoriel. Cette représentation continue d'un maillage est étroitement liée au tenseur métrique, qui contient les informations d'anisotropie nécessaires pour mener l'adaptation. De ce tenseur, on peut extraire en chaque sommet les tailles, directions et étirement des éléments du maillages. Pour des éléments linéaires, la métrique était construite à partir de la matrice hessienne de la solution. L'analogie n'existe plus pour les éléments d'ordre supérieur, pour lesquels l'erreur d'interpolation inclut le tenseur des dérivées d'ordre plus élevé. La méthode explorée dans ce travail consiste à majorer localement cette expression tensorielle de l'erreur par une forme quadratique, puis d'en extraire la métrique associée. Ce faisant, on retrouve une correspondance entre le tenseur métrique et la mesure de l'erreur. On présente des maillages présentant un caractère anisotrope prononcé, pour des champs analytiques et des problèmes physiques. L'utilisation de fonctions présentant des gradients importants permet de tester les limites de la solution proposée. Finalement, on montre que les ordres de convergence en maillages obtenus concordent avec le taux fourni par la théorie sous-jacente à l'adaptation par métriques optimales.

ABSTRACT

Anisotropic meshes have proved to be an efficient alternative to the classical and widely used isotropic meshes, as a support for finite element and finite volume computations. Such meshes allow for a significant reduction of the number of degrees of freedom, saving computational resources that are time and memory. By allowing the elements to stretch along privileged directions in space, the adapted mesh follows the characteristics of both the geometry and the solution of the boundary value problem. While anisotropic adaptation on linear element meshes has become more and more popular, the lack of equivalence between the higher order error models and the metric tensor still hinders anisotropic adaptation when it comes to higher order element meshes, as those two quantities are represented by tensors of different orders. The present thesis introduces a methodology based on recent work to compute a metric tensor field, defined over the computational domain, in order to generate anisotropic meshes for elements of arbitrary order. The resulting mesh is constructed as the triangulation minimizing the interpolation error, evaluated in \mathbf{L}^p norm. As most recent work on higher order meshes are focused on analytical problems, we also present here meshes adapted with respect to velocity fields obtained from fluid dynamics computations. The methodology is thus applied to simple flows, such as the lid-driven cavity and the backward facing step.

The notion of continuous mesh links the classical discrete mesh, support for the finite element computations, to powerful continuous tools such as optimization and calculus of variations. This representation goes hand in hand with the metric tensor, which contains the anisotropic informations needed to perform the adaptation : indeed, the diagonalized form of its matrix representation shows the orientation and the length in each direction of an associated unit element. The classical hessian-based metric tensor, used for linear elements, can no longer be applied to higher order elements, whose interpolation error now features the higher order tensor of the derivatives of the solution. We shall thus look for a tensor of order two that is an upper bound for the higher order derivatives in the neighbourhood of a given mesh vertex. This tensor will then be scaled to obtain a metric tensor, allowing for the anisotropic adaptation. We then illustrate our methodology by computing metric tensors over fields featuring steep gradient regions : the resulting meshes show elements with a significant anisotropic ratio. Finally, a mesh convergence study is performed and a comparison between the obtained convergence rate and the one predicted by the continuous mesh theory is presented.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xii
LISTE DES ANNEXES	xv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	4
2.1 Adaptation anisotrope et application à la CFD	4
2.1.1 Un bref historique	4
2.1.2 Cas de l'interpolation \mathcal{P}^k	5
2.1.3 Générateurs de maillages	7
2.2 Estimation d'erreur a posteriori	7
2.3 Méthode des éléments finis et des éléments spectraux	9
CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE POUR L'ADAPTATION ANISOTROPE	11
3.1 Éléments de géométrie différentielle	11
3.1.1 Espaces métriques	12
3.1.2 Interprétation géométrique de la métrique	13
3.1.3 Espaces riemanniens	14
3.1.4 Modèle d'élément continu et de maillage continu	17
3.1.5 Maillage unité	20
3.1.6 Opérations sur les métriques	22

3.2	Modèle d'erreur pour éléments d'ordre élevé	25
3.2.1	Majoration de l'erreur locale	26
3.2.2	Un problème de minimisation	29
3.2.3	Méthode algébrique	32
3.2.4	Méthode log-simplexe	33
3.3	Métrique optimale pour adaptation multi-échelles	41
3.3.1	Erreur locale en norme \mathbf{L}^∞	42
3.3.2	Calcul des variations et métrique optimale	43
3.3.3	Convergence dans la métrique optimale	46
3.4	Méthode de projection et estimation d'erreur	48
3.4.1	Estimateur pour l'erreur en norme \mathbf{L}^2	52
3.4.2	Vérification de la méthode de reconstruction	53
3.5	Méthodes de reconstruction des dérivées d'ordre élevé	57
3.6	Mise en œuvre et algorithme final	62
CHAPITRE 4	APPLICATIONS NUMÉRIQUES	64
4.1	Maillage anisotrope d'éléments \mathcal{P}^2	64
4.2	Influence de la norme \mathbf{L}^p sur le processus d'adaptation	67
4.3	Cavité carrée entraînée	70
4.4	Marche descendante	73
4.5	Adaptation sur un champ tridimensionnel	79
CHAPITRE 5	CONCLUSION	82
5.1	Synthèse des travaux	82
5.2	Limitations de la solution proposée	83
5.3	Améliorations futures	84
RÉFÉRENCES	85
ANNEXES	90

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Taux de convergence de l'estimateur d'erreur pour la fonction $f_1(x, y)$	55
Tableau 3.2	Taux de convergence de l'estimateur d'erreur pour la cavité carrée . .	56
Tableau 4.1	Nombre de sommets pour les maillages $\mathcal{T}_{h,N}$ à $\mathcal{T}_{h,8N}$	67

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Maillage anisotrope 3D adapté à l'écoulement supersonique autour d'un F-15	5
Figure 3.1	Boule unité de la métrique \mathcal{M} en deux dimensions	14
Figure 3.2	Transformation de la boule unité dans l'espace $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$ vers $(\mathbb{R}^2, \mathcal{I})$. .	15
Figure 3.3	Exemples d'espaces riemanniens dans \mathbb{R}^3	16
Figure 3.4	Éléments unités dans une métrique représentée par son ellipsoïde associé. Figure adaptée de [1].	18
Figure 3.5	Métrique intersection	23
Figure 3.6	Illustration du principe de cohérence pour la majoration de $p_{k+1}(\mathbf{x})$.	28
Figure 3.7	Suite de métriques $\mathcal{M}_i = a_i \mathcal{M}_1$ satisfaisant le principe de majoration de l'erreur	28
Figure 3.8	Insertion de l'ellipse de volume maximal dans la courbe de niveau 1 de $p_{k+1}(\mathbf{x})$ à une tolérance ϵ	30
Figure 3.9	Ellipsoïdes insérés dans la surface de niveau $ p(x, y, z) = 1$	38
Figure 3.10	Convergence des points de la contrainte modifiée pour l'algorithme log-simplexe	39
Figure 3.11	Patch de nœuds et d'éléments associé au sommet \mathbf{z}_i	49
Figure 3.12	Taux de convergence de l'estimateur d'erreur pour la fonction $f_1(x, y)$ pour des maillages de triangles	54
Figure 3.13	Taux de convergence de l'estimateur d'erreur pour la fonction $f_1(x, y)$ pour des maillages de quadrangles	55
Figure 3.14	Conditions limites pour le problème de cavité entraînée	56
Figure 3.15	Erreur pour le problème de cavité carrée pour des interpolants \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 et \mathcal{P}^3 - \mathcal{P}^2	57
Figure 3.16	Erreur pour le problème de cavité carrée pour des interpolants \mathcal{Q}^2 - \mathcal{Q}^1 et \mathcal{Q}^3 - \mathcal{Q}^2	57
Figure 4.1	Surface et isocontours de $f_1(x, y)$	65
Figure 4.2	Maillages d'éléments \mathcal{P}^2 pour la fonction $f_1(x, y)$	66
Figure 4.3	Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la fonction $f_1(x, y)$ pour des maillages de triangles de Lagrange \mathcal{P}^1 et \mathcal{P}^2	67
Figure 4.4	Surface et isocontours de $f_2(x, y)$	68
Figure 4.5	Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la fonction $f_2(x, y)$ pour des maillages de triangles de Lagrange \mathcal{P}^1 à \mathcal{P}^3	68

Figure 4.6	Maillages d'éléments \mathcal{P}^2 pour la fonction $f_2(x, y)$	69
Figure 4.7	Conditions limites et lignes de courant pour le problème de cavité entraînée	70
Figure 4.8	Maillages d'éléments \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 pour la cavité entraînée adaptés à partir de \mathcal{M}_u et \mathcal{M}_v	71
Figure 4.9	Maillages d'éléments \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 pour la cavité entraînée adaptés à partir de $\mathcal{M}_{u \cap v}$	72
Figure 4.10	Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la cavité entraînée pour des maillages \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1	73
Figure 4.11	Géométrie de la marche descendante	73
Figure 4.12	Ligne de courant pour la marche descendante	74
Figure 4.13	Champ de vitesse horizontale et maillage adapté pour \mathcal{M}_u pour la marche descendante	75
Figure 4.14	Champ de vitesse verticale et maillage adapté pour \mathcal{M}_v pour la marche descendante	76
Figure 4.15	Norme du vecteur vitesse et maillage adapté pour $\mathcal{M}_{u \cap v}$ pour la marche descendante	77
Figure 4.16	Maillages adaptés pour $\mathcal{M}_{u \cap v}$ pour la marche descendante pour une complexité croissante	78
Figure 4.17	Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la marche descendante pour des maillages \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1	79
Figure 4.18	Isosurfaces de $f_3(x, y, z)$	79
Figure 4.19	Maillages de tétraèdres \mathcal{P}^2 pour la fonction $f_3(x, y, z)$	80
Figure 4.20	Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la fonction $f_3(x, y, z)$	81

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abbreviations

CFD	Computational Fluid Dynamics
SVD	Singular Value Decomposition

Notations

u	Solution d'un problème différentiel continu, vitesse horizontale
v	Vitesse verticale
u_h	Solution d'un problème différentiel discrétisé
\mathbf{x}	Vecteur position
\mathbf{u}	Vecteur vitesse, vecteur de \mathbb{R}^n
H_u	Matrice hessienne de u
\mathcal{R}	Matrice des vecteurs propres, matrice de rotation
Λ	Matrice diagonale des valeurs propres
\mathcal{Q}	Matrice symétrique définie positive associée à la forme quadratique majorant l'erreur locale, représentation des composantes du tenseur métrique associée
\mathcal{L}	Matrice logarithme $\ln \mathcal{Q}$
\mathcal{I}	Tenseur métrique représenté par la matrice identité
\mathcal{M}	Tenseur métrique ou représentation matricielle de ses composantes
$\mathcal{M}(\mathbf{x})$	Métrique riemannienne évaluée au point \mathbf{x}
\mathbf{M} ou $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$	Métrique riemannienne ou maillage continu
\mathcal{M}_N	Maillage continu de complexité N
$\mathcal{M}_{1 \cap 2}$	Métrique issue de l'intersection des métriques \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2
$\mathcal{M}(t)$	Métrique interpolée
\mathcal{T}_h	Maillage discret
$\mathcal{T}_{h,N}$	Maillage discret unité associé à maillage continu de complexité N
$\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \epsilon)$	Boule centrée en \mathbf{a} de rayon ϵ pour la distance induite par la métrique \mathcal{M}
$\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$	Boule unité centrée en \mathbf{a} de la métrique \mathcal{M}
$\mathcal{B}_h(\mathbf{a})$	Boule unité discrète centrée en \mathbf{a} pour un élément unité associé à la métrique \mathcal{M} , patch d'éléments autour de \mathbf{a}

$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$	Ellipsoïde unité associé à la métrique \mathcal{M}
∇	Opérateur gradient
Δ	Opérateur Laplacien
$D_{\mathbf{x}}^k$	Dérivée directionnelle d'ordre k dans la direction \mathbf{x}
Π_h^k	Interpolant de degré k défini sur le maillage discret
π_h^k	Interpolant de degré k défini sur le maillage continu
R_h	Opérateur de reconstruction de la solution
G_h	Opérateur de reconstruction du gradient de la solution
$\tilde{\cdot}$	Opérateur de lissage (projection par moindres carrés)
Ω	Ouvert ou fermé de \mathbb{R}^n
Ω_K	Sous-domaine de Ω , élément du maillage
$\partial\Omega$ ou Γ	Frontière de Ω
$\partial\Omega_K$	Frontière de l'élément Ω_K
Γ_N	Frontière sujette à une condition limite de Neumann
Γ_D	Frontière sujette à une condition limite de Dirichlet
$T_{\mathbf{x}}\Omega$	Plan tangent d' Ω au point \mathbf{x}
$(\mathbb{R}^n, \mathcal{I})$	Espace euclidien
$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$	Espace métrique euclidien
$(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in \Omega})$	Espace riemannien ou variété riemannienne
$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions définies sur Ω dont la $k^{\text{ème}}$ dérivée est continue
$\mathbf{L}^p(\Omega)$	Espace des fonctions définies sur Ω dont la $p^{\text{ème}}$ puissance est intégrable au sens de Lebesgue
$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre m sont dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$
\mathcal{P}^k	Espace des polynômes de degré au plus k
\mathcal{Q}^k	Espace des polynômes de degré au plus k en chaque variable
ω	Vorticité, sous-domaine de Ω
C	Constante de majoration
C_k^n	Coefficient binomial
h_K	Taille caractéristique de l'élément Ω_K
h_i	Tailles dans la métrique \mathcal{M}
γ	Chemin entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} paramétré par $t \in [0, 1]$

$l_{\mathcal{M}}$	Longueur mesurée dans la métrique \mathcal{M}
d	Densité locale du maillage continu
r_i	Ratio d'anisotropie
$\mathcal{C}(\mathcal{M})$	Complexité du maillage continu
Q_K	Indice de qualité de l'élément Ω_K
α	Multi-indice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, paramètre du modèle d'erreur
$ \alpha $	Longueur du multi-indice $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$
β	Paramètre du modèle d'erreur
h_{min}, h_{max}	Tailles minimales et maximales imposées pour le maillage discret
\arg	Argument du minimum ou maximum
Re	Nombre de Reynolds
$\mathcal{E}(\mathcal{M})$	Fonctionnelle d'erreur de \mathcal{M}
$\Omega_{\mathbf{z}_i}$	Patch de nœuds ou d'éléments autour du sommet \mathbf{z}_i
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne
$ \cdot $	Norme énergétique induite par la forme bilinéaire symétrique $b(u, v)$
$\ \cdot\ _{\mathbf{L}^p(\Omega)}$	Norme associée à l'espace $\mathbf{L}^p(\Omega)$
$ \cdot _{\mathbf{H}^1(\Omega)}$	Seminorme associée à l'espace de Sobolev associée à l'espace $\mathbf{H}^1(\Omega) = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$	Produit scalaire induit par la métrique \mathcal{M}
$\ \cdot\ _{\mathcal{M}}$	Norme induite par la métrique \mathcal{M}
$d_{\mathcal{M}}(\cdot, \cdot)$	Distance induite par la métrique \mathcal{M}
$d_p(\cdot, \cdot)$	Distance induite par le polynôme homogène $p_{k+1}(\mathbf{x})$
$d_{\mathcal{Q}}(\cdot, \cdot)$	Distance induite par la forme quadratique associée à \mathcal{Q}

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	PREUVE DE LA PROPOSITION 4	90
----------	--------------------------------------	----

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les méthodes d'éléments et de volumes finis, probablement les méthodes numériques les plus populaires pour la résolution de problèmes physiques, peuvent requérir des ressources de calcul colossales pour fournir des prédictions fiables, au point que les avancées en terme de puissance de calcul peinent à suivre les demandes associées aux coûts de simulation. Malgré les progrès constants dans ce domaine, une large gamme d'applications reste encore hors de portée, dès que les modèles s'étoffent pour approcher au mieux la réalité. L'utilisation de maillages anisotropes, caractérisés par la présence d'éléments étirés selon certaines directions privilégiées dans l'espace, s'est montrée être un outil particulièrement avantageux pour les simulations de phénomènes physiques, diminuant considérablement le nombre d'éléments initialement requis pour atteindre un niveau d'erreur désiré et engendrant ainsi des gains appréciables en terme de mémoire et de temps de calcul. Leur efficacité a pu être montrée à de nombreuses reprises, permettant de capturer avec une grande précision une gamme de phénomènes de nature anisotrope : on peut citer les problèmes de couches limites et d'ondes de choc en mécanique des fluides, la répartition des contraintes en mécanique des structures, ainsi que des problèmes couplés d'interaction fluide-structure. Leur utilisation est également adaptée à l'identification de structures lagrangiennes cohérentes, pour la description d'écoulements instationnaires [2, 3, 4]. La construction de tels maillages connaît, depuis une vingtaine d'années, un essor majeur, facilité par le développement de cadres théoriques pour l'adaptation basée sur des champs de tenseurs métriques. Ces champs permettent une redéfinition locale de la mesure de distance : le maillage est alors construit sur un espace non-euclidien, adapté aux caractéristiques du problème étudié. Deux approches ont été proposées [1] pour la génération des tenseurs métriques : la première cherche à construire le maillage minimisant l'erreur d'interpolation, évaluée en norme \mathbf{L}^p . Cette approche, qui est celle employée dans ce travail, est qualifiée de *multi-échelles*, car le choix de la norme minimisée influe directement sur le niveau de détail de la solution capturé par le maillage, *i.e.*, la gamme d'échelles résolues. On note que dans cette méthode, la définition des métriques est guidée par l'erreur d'interpolation $u_h - \Pi u_h$ uniquement. La seconde approche se veut plus proche de la physique, et tire profit des équations aux dérivées partielles du problème, ignorées dans la méthode multi-échelles : les métriques sont construites en considérant l'erreur d'approximation sur une fonctionnelle de la solution $F(u)$. Ces fonctionnelles sont par exemple la vorticité $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u}$, qui génère des contraintes de fatigue, ou la portance d'une aile d'avion, en aérodynamique. Cette dernière revêt une importance particulière dans l'industrie, puisque les prédictions obtenues influenceront les processus d'optimisation de forme. Cette méthode est

à rapprocher aux estimations d'erreur *goal oriented*, qui nécessitent la solution d'un problème adjoint.

Les besoins pour des résultats de précision croissante amènent à considérer des méthodes jouissant d'ordres de convergence plus élevés que la plupart des méthodes classiques : on peut citer les méthodes d'éléments spectraux ou de type Galerkin discontinu. Avec l'émergence de telles méthodes numériques d'ordre élevé, le contrôle d'un modèle d'erreur quadratique, jusque là d'application pour les méthodes d'ordre un, devient insuffisant. Il s'agit alors de relier l'expression de la métrique, qui est intrinsèquement un tenseur d'ordre deux, avec les modèles d'erreur d'ordre > 2 , habituellement représentés par les tenseurs des dérivées d'ordre $k \geq 3$ de la solution. En l'absence de lien univoque entre ces quantités, la théorie derrière la construction des tenseurs métriques optimaux est principalement limitée aux éléments linéaires, et la généralisation aux degrés supérieurs est encore balbutiante. L'implantation d'un cadre formel pour l'adaptation anisotrope de maillages d'ordre élevé semble donc nécessaire pour tirer profit de ces méthodes numériques, en leur fournissant les maillages adéquats, permettant de rencontrer les ordres de convergence attendus.

On se propose, dans ce travail, d'implémenter et de tester une méthodologie pour l'adaptation anisotrope basée sur un champ de tenseurs métriques, applicable autant aux éléments munis d'interpolants \mathcal{P}^1 que d'interpolants d'ordre plus élevé. En particulier, une modélisation de l'erreur d'interpolation d'ordre $k \geq 3$ ainsi que sa relation avec le tenseur métrique sont explicitées sur base de la littérature récente. Cette méthodologie peut alors être appliquée à des problèmes de mécanique des fluides numérique (*computational fluid dynamics, CFD*).

Plan du mémoire

Au chapitre 2, une brève revue de littérature retrace l'historique de l'adaptation de maillage anisotrope, en mettant l'accent sur l'adaptation par métriques continues. Cet historique est dédié aux éléments linéaires, pour lesquels les différentes méthodes d'adaptation sont maintenant bien implantées. La difficulté inhérente rencontrée lors du passage aux éléments d'ordre plus élevé est discutée d'emblée ; on résume également les développements récents à ce sujet. Un éventail de logiciels et bibliothèques d'adaptation (maillages) anisotrope, acceptant un tenseur métrique comme définition de distance, est présenté. Enfin, les méthodes d'estimation d'erreur *a posteriori* jouant un rôle clé dans toute méthode d'adaptation, on présente brièvement les principales caractéristiques de certaines d'entre elles, en mettant l'accent sur leurs liens avec les méthodes d'éléments finis.

Le troisième chapitre est le cœur de ce document. Il décrit la procédure de post-traitement appliquée pour mener l'adaptation de maillage. On commence par donner les notions de base

en géométrie différentielle, qui permettent de construire un équivalent continu au maillage discret classique. Ce maillage continu est construit comme l'unique structure géométrique minimisant l'erreur d'interpolation sur le domaine de calcul. Cette formulation est intéressante, car elle permet de disposer d'outils puissants pour la résolution de tels problèmes de minimisation, inaccessibles sur des maillages discrets. On verra que lors de l'adaptation à proprement parler, le meilleur est l'intermédiaire entre les deux représentations, et il fournit un représentant discret de la classe d'équivalence de ce maillage continu. L'erreur d'interpolation est ici modélisée localement par un polynôme homogène, dont l'expression nécessite la reconstruction du tenseur des dérivées de la solution approchée.

Finalement, la méthodologie présentée est appliquée sur plusieurs cas académiques au chapitre 4, où l'on présente les maillages anisotropes obtenus pour des problèmes bi- et tridimensionnels, principalement pour des interpolants quadratiques.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Adaptation anisotrope et application à la CFD

2.1.1 Un bref historique

Si le concept d'adaptation du maillage à une solution remonte pour ainsi dire à l'origine de la méthode des éléments finis, l'idée d'adaptation anisotrope n'arrive qu'à la fin des années 1980, avec les travaux de Peraire *et al.* [5] : ils furent parmi les premiers à proposer une méthode de reconstruction des dérivées à partir de la solution calculée, pour ensuite utiliser cette information anisotrope et générer des éléments étirés. En modifiant un algorithme d'avance frontale, les maillages générés présentent un rapport d'aspect de 5 : 1. Au début des années 1990, Mavriplis [6] génère des maillages d'éléments étirés en 2D pour des calculs de couches limites et de sillages à partir d'une triangulation de Delaunay. La méthode de Delaunay est toutefois modifiée, en considérant le maillage des éléments non pas dans le plan, mais sur une surface de \mathbb{R}^3 localement déformée. On voit apparaître en filigrane le concept de métrique. En 1992, les travaux de Vallet [7] présentent les bases théoriques pour la génération de maillages anisotropes. Les idées de Mavriplis sont développées et formalisées par Castro-Diaz *et al.* [8], qui définissent un contexte mathématique rigoureux pour l'adaptation anisotrope, basé sur le concept d'espace riemannien. Cette approche inclut de plus l'adaptation de maillage isotrope, en la présentant comme un cas particulier de l'adaptation anisotrope. Les travaux de Dervieux *et al.* [9] viennent compléter ce cadre formel, en introduisant le contrôle de l'erreur d'interpolation sous la forme d'une fonctionnelle de la métrique. On peut également mentionner le développement d'estimateurs d'erreur en 2D et 3D sensibles aux directions, *i.e.* de nature anisotrope, présentés par Apel [10] et Formaggia & Perotto [11]. En trois dimensions, les travaux pionniers sont attribués à Löhner [12], en 1990. Néanmoins, des problèmes de taille se posent lors du passage en 3D, où l'existence du maillage anisotrope n'est pas toujours garantie, et où l'adaptation anisotrope est plus délicate. Il faut attendre le début des années 2000 pour voir apparaître des maillages tridimensionnels réellement anisotropes, avec, entre autres, les travaux de Fortin & Balhamadia [13], Gruau & Coupez [14] et Alauzet *et al.* [15], ces derniers étendant le cadre théorique établi par Dervieux en dimension quelconque. Cette théorie permet de construire des maillages de tétraèdres avec un nombre de sommet fixé, tout en contrôlant l'erreur d'interpolation. Des exemples impressionnants appliqués aux écoulements supersoniques sont présentés par Loseille [1], figure 2.1. Dans le cadre de ce mémoire, on se place dans le contexte formel introduit par Dervieux, tel que formulé dans la thèse de Loseille [1] pour des éléments linéaires en 2D et 3D. En particulier, cette théorie

permet de calculer un taux de convergence théorique en maillage, auquel on peut se référer pour la vérification de la méthode d'adaptation.

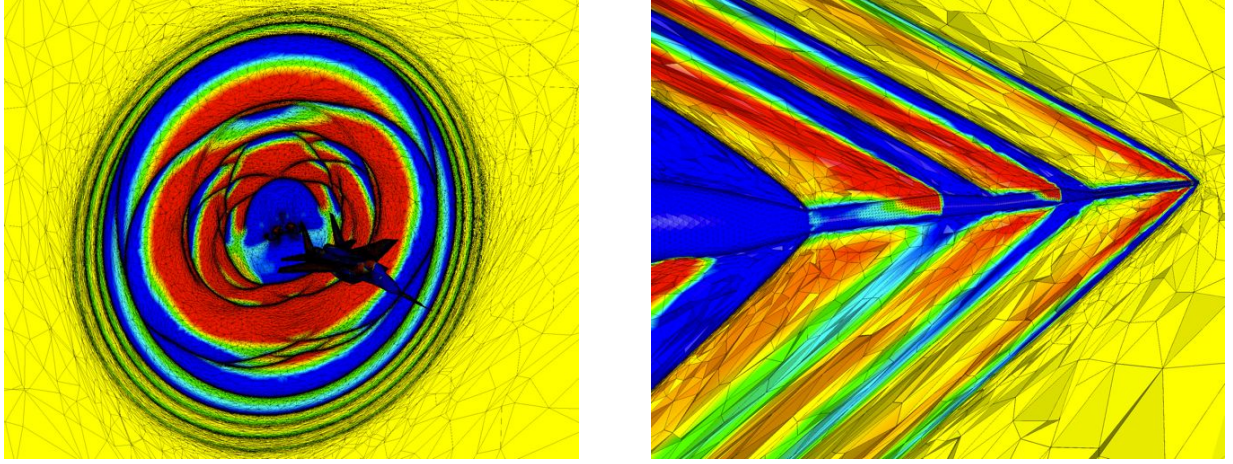


Figure 2.1 Iso-valeurs du nombre de Mach autour d'un avion McDonnell Douglas F-15 équipé d'une *quiet spike*, qui a pour but de séparer l'arc de choc au niveau du nez en plusieurs chocs de moindre intensité. À gauche, iso-valeurs du nombre de Mach dans une coupe en aval. À droite, nombre de Mach autour de la pointe. Le maillage anisotrope final comporte 60 280 606 tétraèdres et permet de capturer correctement les chocs soniques dans l'écoulement. Images tirées de [1].

2.1.2 Cas de l'interpolation \mathcal{P}^k

Embûche

Les travaux mentionnés ci-dessus se basent tous sur des reconstructions de la matrice hessienne $H_u = \nabla^2 u$ d'une fonction supposée C^2 pour l'extraction d'informations d'anisotropie, et sont donc limités aux fonctions d'interpolation de type \mathcal{P}^1 . Un exemple simple permet de montrer pourquoi les méthodes d'adaptation de maillages anisotropes sont pléthore pour le cas linéaire, alors que les applications pour des interpolants de degré $k \geq 2$ sont plus rares : on considère une fonction u suffisamment régulière définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$, on prend simplement $u \in C^3$ pour notre application. En notant $\Pi_h^1 u$ l'interpolant linéaire de u sur Ω et en supposant que l'erreur maximale est atteinte dans un voisinage d'un point \mathbf{a} , on a l'estimé suivant pour l'erreur d'interpolation [9], basé sur le reste du développement en série de Taylor de u autour de \mathbf{a} :

$$|e(\mathbf{x})| = |u(\mathbf{x}) - \Pi_h^1 u(\mathbf{x})| \leq C |\langle \mathbf{x}, H_u(\mathbf{a}) \mathbf{x} \rangle|$$

Dans cette relation, $H_u(\mathbf{a})$ désigne la matrice hessienne de u évaluée au point \mathbf{a} , soit $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$, et \mathbf{x} est un vecteur dans le voisinage de \mathbf{a} . Pour une certaine valeur de C , il existe un point dans le voisinage de \mathbf{a} pour lequel l'égalité est vérifiée : on en déduit que localement, l'erreur d'interpolation s'écrit comme une fonction de la hessienne, soit un tenseur d'ordre deux. Comme le tenseur métrique est lui aussi un tenseur d'ordre deux (voir définition 1), une correspondance existe entre l'erreur d'interpolation locale et la métrique à utiliser pour l'adaptation : c'est sur base de ce lien que sont construites les méthodes anisotropes pour interpolants linéaires. Cette correspondance disparaît pour des interpolants de degré plus élevé : en effet, pour une interpolation de degré deux, on pourrait écrire :

$$|e(\mathbf{x})| = |u(\mathbf{x}) - \Pi_h^2 u(\mathbf{x})| \leq C |\langle \mathbf{x}, \nabla^3 u(\mathbf{a})[\mathbf{x}]\mathbf{x} \rangle|,$$

où $\nabla^3 u(\mathbf{a})$ est le tenseur d'ordre trois des dérivées troisièmes de u au point \mathbf{a} , soit $\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a})$, et la notation $\nabla^3 u(\mathbf{a})[\mathbf{x}]$ exprime le tenseur “évalué” dans la direction \mathbf{x} , soit un tenseur d'ordre deux après contraction. Bien qu'il n'existe pas de notation compacte répandue pour exprimer le terme d'erreur à l'aide d'un tenseur d'ordre plus élevé, ce raisonnement peut se généraliser à l'erreur d'interpolation de degré k . Dans ce cas, l'erreur locale se comporte comme un tenseur d'ordre $k + 1$, et l'analogie avec un tenseur métrique n'est plus évidente. C'est cet obstacle de taille qui limite le développement des méthodes d'adaptation anisotropes aux éléments d'ordre élevé.

État de l'art

Comme mentionné précédemment, la littérature est moins fournie concernant l'adaptation sur des maillages d'éléments \mathcal{P}^k . Les travaux de Cao [17, 18] (2005) présentent une méthode de construction de métriques pour des interpolants de degré quelconque en deux dimensions, puis sont étendus à \mathbb{R}^n . Une méthodologie similaire à celle de la section 3.2 est présentée, à la seule différence que le problème de minimisation est modifié pour éliminer les contraintes. Dans sa thèse de doctorat, Mirebeau [19] (2010) donne une analyse poussée de la théorie sous-jacente à l'adaptation basée sur les métriques riemanniennes, pour des éléments d'ordre arbitraire. Plus récemment, Hecht & Kuate [20] (2014) ont proposé une méthode d'approximation de l'erreur d'interpolation d'ordre élevé par une forme quadratique 2D, de laquelle une métrique est déduite. Outre le fait que cette méthode ne soit pas facilement généralisable en 3D, la complexité associée au calcul des métriques deviendrait prohibitive en trois dimensions. Dans le même ordre d'idée, Coulaud & Loseille [21] (2016) calculent une suite de métriques $(\mathcal{Q}_j)_j$ en 2D et 3D censée converger vers une métrique optimale locale. Chaque métrique de la suite est déterminée à partir d'un problème d'optimisation linéaire résolu par l'algorithme

du simplexe. Les applications dans [20] et [21] portent toutes sur des exemples analytiques. Finalement, la thèse de Mbinky [22] (2013), sous la direction de Frédéric Alauzet et Adrien Loseille, détaille des méthodes de décomposition de tenseurs symétriques en tenseurs de rang plus faible. Les informations d'anisotropie sont alors extraites des formes diagonalisées des tenseurs de dérivées d'ordre élevé, tout comme les directions principales étaient extraites de la hessienne dans le cas \mathcal{P}^1 . Ces méthodes de décomposition sont, elles aussi, appliquées à des exemples analytiques.

Contrairement au cas linéaire, très peu de méthodes d'ordre élevé sont appliquées à la CFD. Dans ce travail, les méthodes de Hecht & Kuate et de Coulaud & Loseille sont implémentées et appliquées à des exemples analytiques ainsi qu'à des écoulements simples.

2.1.3 Générateurs de maillages

À côté des fondements mathématiques nécessaires à l'adaptation anisotrope, un support informatique est requis pour mener l'adaptation à proprement parler. Le développement de générateurs de maillages acceptant une métrique comme définition locale de distance est donc un élément clé. On cite ici des logiciels ou bibliothèques numériques d'adaptation anisotrope : en 2D, BL2D [23] (mailleur type Delaunay), Bamg [24] (Delaunay contraint) et Mmg2D, développés par l'INRIA¹, en France ; en 3D, Mmg3D [25] (Delaunay), également développé par l'INRIA. On mentionne aussi la bibliothèque MAdLib [26], développée à l'Université Catholique de Louvain. Dans ce travail, l'adaptation de maillages est menée avec le logiciel Mmg2D en deux dimensions et Mmg3D en trois dimensions.

2.2 Estimation d'erreur a posteriori

Les méthodes d'adaptation de maillages reposent sur des estimés de l'erreur d'approximation, commise lors de la résolution d'un problème par éléments finis. Contrairement aux estimateurs *a priori*, qui s'attachent principalement à fournir des taux de convergence asymptotiques, de tels estimateurs font usage des informations disponibles en incorporant la solution calculée, et sont donc qualifiés d'*a posteriori*. Suivant l'objectif visé, différentes catégories d'estimateurs *a posteriori* peuvent être employés : on donne ici une brève description des principaux estimateurs d'erreur, en se basant sur le problème modèle (2.1) présenté par Ainsworth &

1. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

Oden [27].

$$\begin{aligned}
-\Delta u + cu &= f \text{ dans } \Omega \\
u &= 0 \text{ sur } \Gamma_D \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \Gamma_N
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour une solution approchée u_h , les estimateurs **explicites** mesurent le résidu entre u_h et la solution u à l'aide du problème original (2.1). Ce résidu est décomposé en deux contributions : le résidu intérieur r caractérise le respect de l'équation aux dérivées partielles sur Ω , et les résidus aux frontières R , ou les sauts, mesurent le respect de la condition de flux sur Γ_N d'une part, et les discontinuités aux interfaces entre les éléments d'autre part. Ces derniers sont donc un indicateur de la régularité de la solution u_h . Pour le problème (2.1), ces résidus peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
r &= f + \Delta u_h - cu_h \text{ dans } \Omega_K \\
R &= \begin{cases} g - \frac{\partial u_h}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega_K \cap \Gamma_N \\ -\frac{\partial u_h}{\partial n_i} - \frac{\partial u_h}{\partial n_j} & \text{sur } \partial\Omega_{K,i} \cap \partial\Omega_{K,j} \end{cases}
\end{aligned}$$

Des estimateurs pour l'erreur sont alors dérivés pour certaines normes. Par exemple, une estimation de l'erreur dans la norme énergétique pourrait s'écrire :

$$\|e\|^2 \leq C \sum_{\Omega_K} h_K^2 \|r\|_{\mathbf{L}^2} + h_K \|R\|_{\mathbf{L}^2},$$

et chaque élément contribue à l'estimation de l'erreur globale. Ces estimateurs sont appelés explicites, car ils utilisent directement l'information à disposition sur u_h , contrairement aux méthodes implicites qui nécessitent la résolution d'un problème secondaire.

Les estimateurs **implicites** tentent d'approximer localement la fonction d'erreur, plutôt que de trouver une valeur pour la norme de l'erreur. Ils nécessitent la résolution approchée d'un problème aux limites défini soit sur des patches d'éléments, soit sur les éléments eux-mêmes. Outre le coût de la résolution de ces problèmes secondaires, l'imposition des conditions aux limites pour chacun des problèmes est délicate. En pratique, des conditions de Neumann sont imposées pour les éléments intérieurs en moyennant les flux obtenus de la solution u_h , et le caractère bien posé de ces problèmes n'est pas toujours garanti.

Les méthodes de **résidus équilibrés** tentent de corriger ce problème en imposant uniquement des flux compatibles pour les problèmes secondaires. En imposant des conditions d'équilibre (*p-th order equilibration conditions*) qui assurent la compatibilité, des flux g_K sont déterminés pour obtenir des problèmes implicites bien posés. Cette méthode est décrite dans Ainsworth & Oden [28] et Ladavèze & Leguillon [29].

Les **estimateurs dans des quantités d'intérêt** mesurent l'erreur commise non plus sur u , mais sur une fonctionnelle de la solution $Q(u)$, telle que la valeur de la solution en un point \mathbf{x}_0 , ou une moyenne de la solution dans un sous-domaine $\omega \in \Omega$, équation (2.2). Voir Oden & Prudhomme [30] pour plus de détails, et Mozolevski & Prudhomme [31] pour une estimation dans des quantités d'intérêt par méthode des flux équilibrés.

$$\begin{aligned} Q(u) &= u(\mathbf{x}_0) \\ Q(u) &= \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} u \, d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Enfin, les estimateurs par **reconstruction** s'attachent à reconstruire localement des quantités d'intérêt, telles que le gradient de la solution ∇u , à l'aide de méthodes de lissage appropriées². Une mesure d'erreur apparaît directement en mesurant la différence entre cette quantité reconstruite et le gradient de la solution approchée, ∇u_h . Bien que pouvant paraître assez simpliste, cette méthode d'estimation produit néanmoins des résultats pertinents pour toute une gamme d'applications. La méthode la plus populaire est probablement celle proposée par Zhu et Zienkiewicz [32] à la fin des années 1980, puis modifiée dans les années 1990 avec la méthode dite *superconvergent patch recovery (SPR)* [33, 34]. Elle est réputée bénéficier de propriétés de *super-convergence*³, lorsque la solution est échantillonnée à des points spécifiques lors de la procédure de lissage. Selon le lissage employé, il existe des variations de la méthode originale de Zhu-Zienkiewicz, telle que la méthode dite *polynomial preserving recovery (PPR)* de Zhang & Naga [35]. C'est cette dernière méthode qui est utilisée dans ce travail.

2.3 Méthode des éléments finis et des éléments spectraux

Par souci de concision, on ne présente pas en détails la méthode des éléments finis : pour une introduction détaillée, on réfère à quelques excellents ouvrages de référence (Brenner &

2. Typiquement, pour des éléments linéaires, le gradient constant par morceaux est projeté dans l'espace des polynômes linéaires par moindres carrés.

3. Certains auteurs emploient le terme *super-convergence* lorsque le taux de convergence de la quantité reconstruite, par exemple ∇u , est d'un ordre supérieur au taux de convergence de la quantité avant post-traitement.

Scott [36], Ciarlet [37], Ern & Guermond [38]) pour les méthodes classiques, et Patera [39] et Pozrikidis [40] pour les méthodes spectrales. La résolution par éléments finis et spectraux se fait à l'aide du programme **EF**, pour Éléments Finis, développé en **C++** à l'École Polytechnique de Montréal. La contribution faite dans ce travail au programme consiste uniquement en des modules de post-traitement, pour lesquels la vérification est menée dans les sections suivantes. Des travaux extensifs de vérification et de validation du code en lui-même ont été réalisés dans plusieurs mémoires (Raux [41], Moulin [42], Wasselet [43]), que l'on consultera pour plus de détails.

CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE POUR L'ADAPTATION ANISOTROPE

Le cadre choisi dans ce mémoire pour l'adaptation anisotrope est celui des métriques continues optimales, telles que proposé, entre autres, par Alauzet, Loseille, Dervieux et Frey de l'INRIA. Ce cadre est décrit en détail dans les sections 3.1 à 3.3 de ce chapitre, sur base de la présentation donnée par Loseille pour les éléments \mathcal{P}^1 , dans sa thèse de doctorat [1]. Ces travaux font office de livre de référence, duquel sont extraits les définitions et résultats principaux présentés ici.

3.1 Éléments de géométrie différentielle

Le principe de maillage adaptatif anisotrope repose sur le concept de *métrique* et de *maillage unité*. En effet, on peut considérer qu'un algorithme de maillage anisotrope est, dans une certaine mesure, un mailleur isotrope avec une définition différente des distances. Il vise alors à générer des éléments dont les arêtes sont de longueur unitaire lorsque mesurée au moyen de la distance prescrite. Dans le cas général, cette définition de distance (la *métrique*) varie continûment d'un point à l'autre du domaine, permettant ainsi de prescrire des tailles d'arêtes différentes : la notion classique de distance euclidienne n'est alors plus suffisante pour mesurer des longueurs. Une solution est d'utiliser des éléments de géométrie différentielle comme un outil pour l'adaptation de maillage anisotrope. Cette section reprend les éléments principaux de la théorie développée par Loseille [1], et a pour but d'introduire un cadre formel dans lequel on construit les maillages anisotropes : notions de métrique, d'espace métrique et d'espace riemannien. Après avoir défini ces espaces, il apparaît directement une équivalence entre un espace métrique euclidien et la *modélisation continue* d'un élément, ou *élément continu*, qui sera également définie. De même, l'extension aux espaces riemanniens, ou variétés riemanniennes, se révèle être un outil puissant pour la modélisation d'un *maillage continu*, un ensemble d'éléments continus. En effet, la restriction à un point d'un espace riemannien permet de considérer l'espace tangent à ce point, qui possède une structure d'espace métrique euclidien, support d'un élément continu. L'espace riemannien au complet apparaît alors comme un support naturel pour la définition d'un maillage d'éléments continus. Le lien entre un maillage classique, ou maillage discret, et sa contrepartie continue est fort : l'information sur les éléments anisotropes, telle que leur orientation, leur taille et le nombre de sommets, peut être extraite de la représentation continue, et de la même manière, le maillage continu peut être reconstruit sur base des informations locales contenues dans les éléments discrets [1]. On montre finalement que cette modélisation continue d'un maillage permet

d'utiliser de manière bien posée, sur le maillage discret, des outils de nature intrinsèquement continue, tels que la différentiation, l'optimisation et le calcul des variations.

3.1.1 Espaces métriques

On commence par donner la définition du tenseur métrique, qui est la clé de voûte des méthodes d'adaptation anisotrope :

Définition 1. Soit Ω une surface¹ de \mathbb{R}^2 . En chaque point $\mathbf{x} \in \Omega$, un **tenseur métrique** \mathcal{M} , ou **métrique**, est une forme bilinéaire qui associe à deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} du plan tangent au point considéré $T_{\mathbf{x}}\Omega$, un nombre réel :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : T_{\mathbf{x}}\Omega \times T_{\mathbf{x}}\Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),\end{aligned}$$

telle que \mathcal{M} soit symétrique, définie positive et non dégénérée, c'est-à-dire $\mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ pour \mathbf{u} et \mathbf{v} non nuls.

Le tenseur métrique est un tenseur d'ordre deux, qui permet de définir les distances dans un espace. Dans un système de coordonnées donné, on peut représenter ses composantes par une matrice symétrique définie positive \mathcal{M} . Dans la suite, on utilise sans distinction la notation \mathcal{M} pour le tenseur métrique et sa représentation matricielle. Un espace muni d'un tenseur métrique est appelé *espace métrique euclidien* :

Définition 2. Un **espace métrique euclidien** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$. Le produit scalaire est défini au moyen d'une métrique \mathcal{M} . On note cet espace $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$. Le produit scalaire entre deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} est défini par $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{M}} = \mathbf{x}^T \mathcal{M} \mathbf{y}$. Il induit une distance entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} donnée par $d_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle_{\mathcal{M}}} = \sqrt{\mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathcal{M} \mathbf{a} \mathbf{b}}$.

Le produit scalaire ainsi défini induit une norme sur \mathbb{R}^n que l'on note $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$. Cette norme nous permet, à son tour, de définir un espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$. Sur un espace métrique euclidien, on peut définir les notions d'angles et de volumes, indispensables à la définition d'un maillage :

- l'angle formé par deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} est l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{M}}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{M}} \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{M}}}, \quad (3.1)$$

1. Dans le cas général, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une variété différentielle.

- le volume d'un sous-ensemble borné $\Omega_K \subset \Omega$ (qui représentera par la suite un élément du maillage) est défini par

$$|\Omega_K| = \int_{\Omega_K} \sqrt{\det \mathcal{M}} \, d\Omega. \quad (3.2)$$

3.1.2 Interprétation géométrique de la métrique

Pour une illustration concrète du tenseur métrique \mathcal{M} , on s'intéresse à sa représentation géométrique. On considère dans l'espace $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ la boule ouverte centrée en un point \mathbf{a} et de rayon ε :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \varepsilon) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 < \varepsilon^2 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}\mathbf{x}^T \mathcal{M} \mathbf{a}\mathbf{x} < \varepsilon^2 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathcal{M} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) < \varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

On peut toujours exprimer la boule de rayon ε à partir de la boule unité par mise à l'échelle :

$$\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \varepsilon) = \left\{ \varepsilon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, 1) \right\} \quad (3.3)$$

On cherche alors uniquement à caractériser la boule unité centrée en \mathbf{a} . Pour ce faire, on simplifie l'expression de la distance en exprimant le vecteur $(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ dans la base formée par les vecteurs propres de \mathcal{M} . Comme \mathcal{M} est une matrice symétrique définie positive, elle peut être diagonalisée sous la forme

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \Lambda \mathcal{R}^T, \quad (3.4)$$

avec \mathcal{R} la matrice orthogonale des vecteurs propres de \mathcal{M} et Λ la matrice diagonale des valeurs propres λ_i , toutes strictement positives. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, 1) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathcal{M} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}' - \mathbf{a}')^T \Lambda (\mathbf{x}' - \mathbf{a}') < 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x'_i - a'_i)^2 \lambda_i < 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \left(\frac{x'_i - a'_i}{h_i} \right)^2 < 1 \right\}, \end{aligned}$$

où \mathbf{x}' désigne le vecteur dans la base propre et on note $h_i = \lambda_i^{-\frac{1}{2}}$. Cette expression finale est celle des points inclus dans un ellipsoïde $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ centrée en \mathbf{a} et de demi-axes h_i . L'ellipsoïde est aligné avec les vecteurs propres de la métrique, comme illustré sur la figure 3.1.

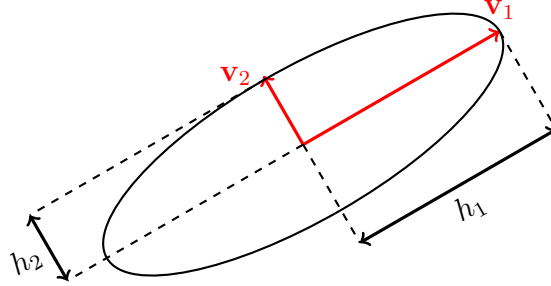


Figure 3.1 Boule unité de la métrique \mathcal{M} en deux dimensions

On peut finalement décrire la boule unité de \mathcal{M} à l'aide du tenseur métrique. En effet, il permet de définir une application qui associe à la boule unité \mathcal{B}_I , la boule unité $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. En considérant la matrice

$$\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{R}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}^T = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} \mathcal{R}^T, \quad (3.5)$$

on peut utiliser le changement variable $\bar{\mathbf{x}} = \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}$. La boule unité/ellipsoïde $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{M}} &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathcal{M} \mathbf{x} = 1 \right\} \\ &\text{En introduisant le changement de variable,} \\ &= \left\{ \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\mathbf{x}}^T \mathcal{M} \bar{\mathbf{x}} = 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{M} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x} = 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

La figure 3.2 illustre l'application bijective entre les boules unités.

3.1.3 Espaces riemanniens

La métrique d'un espace métrique euclidien est représentée par une matrice à coefficients constants sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dans le cas général, la métrique peut varier d'un point

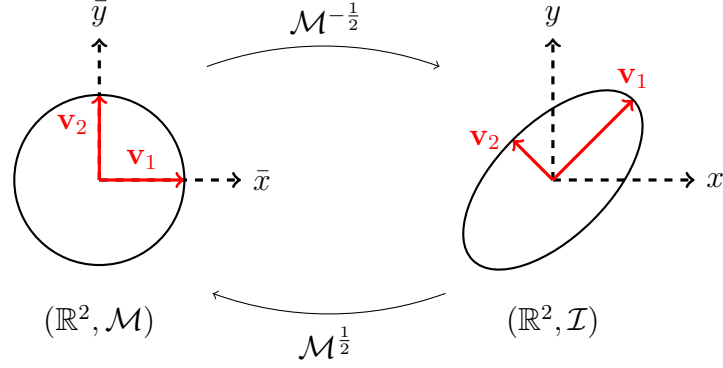


Figure 3.2 Transformation de la boule unité dans l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$ vers l'espace $(\mathbb{R}^2, \mathcal{I})$, où \mathcal{I} désigne la métrique associée à la matrice identité. Dans l'espace dont la distance est définie par la métrique \mathcal{M} , la boule unité est représentée par un cercle unité.

  l'autre du domaine, et on est alors amené à considérer un champ de métriques $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ qui associe à chaque point une matrice symétrique définie positive. Dans la suite, on appelle *métrique*, sans distinction, le champ de métriques ou une métrique constante. Avant de définir l'espace associé, on commence par préciser les contraintes de régularité sur le champ de métriques :

Définition 3. Soit $\mathbf{x} \in \Omega$ un point d'une variété différentielle, on note $T_{\mathbf{x}}\Omega$ l'espace tangent à \mathbf{x} . Une **métrique riemannienne** $\mathcal{M}(\cdot)$ est une famille de produits scalaires

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) : T_{\mathbf{x}}\Omega \times T_{\mathbf{x}}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{M}(\mathbf{x})$ est dans \mathcal{C}^∞ .

Définition 4. Un **espace riemannien** ou **variété riemannienne** est une variété différentielle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ munie d'une métrique riemannienne $\mathcal{M}(\cdot)$. En chaque point $\mathbf{x} \in \Omega$, la restriction $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ définit un produit scalaire sur l'espace tangent $T_{\mathbf{x}}\Omega$, le dotant d'une structure d'espace métrique euclidien. On note un espace riemannien $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in \Omega})$.

Les définitions précédentes s'appliquent donc toujours dans le plan tangent à un point \mathbf{x} d'un espace riemannien. La figure 3.3 montre un exemple simple d'espace riemannien, la sphère en trois dimensions, avec l'illustration d'un plan tangent.

Comme la métrique varie maintenant d'un point à l'autre, il est nécessaire de redéfinir la distance entre deux points : le chemin le plus court n'est plus donné par une ligne droite, mais par une géodésique : il faut considérer la contribution de la métrique en chaque point situé entre les extrémités. La longueur totale s'exprime donc en intégrant les petites contributions

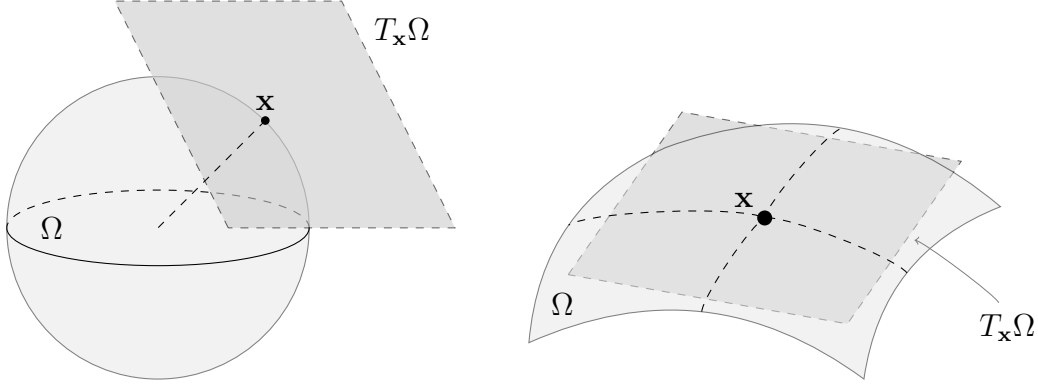


Figure 3.3 Exemples d'espaces riemanniens : à gauche, la sphère est une variété continue dans \mathbb{R}^3 . En chaque point de sa surface, le plan tangent $T_{\mathbf{x}}\Omega$ est un espace métrique euclidien dont la métrique est définie par $\mathcal{M}(\mathbf{x})$. À droite, exemple pour une variété quelconque dans \mathbb{R}^3 .

de distance.

Définition 5. On calcule la longueur d'un chemin dans un espace riemannien avec une courbe paramétrée $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega : t \mapsto \gamma(t)$. La longueur du chemin dans la métrique \mathcal{M} est calculée à l'aide du vecteur vitesse γ' :

$$l_{\mathcal{M}}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathcal{M}}} \, dt$$

La distance entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} est alors donnée par le chemin de longueur minimale :

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \inf_{\gamma} l_{\mathcal{M}}(\gamma).$$

Dans un contexte d'adaptation de maillage, on considérera uniquement des arêtes rectilignes entre deux points : le chemin est simplement donnée par $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{ab}$ et sa longueur est

$$l_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) = \int_0^1 \sqrt{\mathbf{ab}^T \mathcal{M}(\mathbf{a} + t\mathbf{ab}) \mathbf{ab}} \, dt.$$

3.1.4 Modèle d'élément continu et de maillage continu

On définit maintenant les concepts d'élément et de maillage continus [1]. Cette modélisation se restreint à la modélisation des simplexes (triangles, tétraèdres), qui sont les types d'éléments considérés dans les méthodes d'adaptation pour ce travail. Cette limitation provient essentiellement des mailleurs anisotropes disponibles (Mmg2/3D) qui génèrent, pour le moment, uniquement des maillages simpliciaux. On commence par définir un élément continu et on s'intéresse aux caractéristiques des éléments discrets associés à celui-ci : l'information contenue dans l'élément continu peut être traduite en information sur l'élément discret, et vice versa. La généralisation de l'élément au maillage continu est détaillée. Comme mentionné précédemment, l'algorithme d'un mailleur anisotrope cherche à construire un *maillage unité* dans la métrique prescrite : on est donc naturellement amené à se poser les questions de l'existence et de l'unicité d'un tel maillage. Par une preuve constructive, on montre qu'il existe toujours un élément discret unité associé à un élément continu. Malheureusement, cette propriété valable pour les éléments ne s'applique pas toujours pour un maillage en entier : ce problème est lié directement à la question de pavage du plan ou de l'espace par le simplexe régulier de référence.

Définition 6. La boule unité $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(0, 1)$ d'un espace métrique euclidien $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ est appelée **élément continu**. De manière équivalente, un élément continu est aussi défini simplement par la métrique \mathcal{M} .

Comme illustré précédemment, $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(0, 1)$ est un ellipsoïde centré à l'origine, avec pour demi-axes les $h_i = \lambda_i^{-\frac{1}{2}}$. La taille (surface en 2D ou volume en 3D) de l'élément est proportionnelle au produit

$$\prod_{i=0}^n h_i = \prod_{i=0}^n \lambda_i^{-\frac{1}{2}} = \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{M}}},$$

et son orientation est celle de la base formée par les vecteurs propres de la matrice \mathcal{M} . On souligne ici que le volume de l'ellipsoïde est inversement proportionnel au déterminant de la métrique : ce résultat est utilisé par la suite pour obtenir la métrique offrant la borne la plus serrée possible sur l'erreur d'interpolation. Cet élément continu est utilisé pour modéliser tous les éléments discrets qui sont unité pour la métrique \mathcal{M} : les éléments discrets associés à cet élément continu sont simplement les simplexes unitaires inclus dans $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Avec la définition 5 pour la longueur, on a :

Définition 7. Soit $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ un élément unité dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$. Le simplexe $\Omega_K \subset \mathbb{R}^n$ défini par ses sommets $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1})$ est un **élément unité** dans cette espace si toutes ses arêtes sont

de longueur unitaire lorsque calculée dans la métrique :

$$l_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j) = 1, \quad \forall i \neq j.$$

Pour une métrique donnée, on voit directement qu'il peut exister plusieurs éléments discrets (simplexes) unités. La figure 3.4 montre plusieurs éléments qui sont tous unités dans une même métrique. À l'opposé, la question d'existence se pose : **pour une métrique donnée, existe-t-il toujours au moins un élément unité?** Et réciproquement, pour un simplexe donné, existe-t-il toujours une métrique dans laquelle cet élément soit unité? On peut répondre à ces deux questions avec le résultat suivant :

Proposition 1.

- Si $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ est un espace métrique euclidien, alors il existe un ensemble non vide d'éléments unités dans la métrique \mathcal{M} .
- Si $\Omega_K \subset \mathbb{R}^n$ est un simplexe de volume non nul, alors il existe une **unique** métrique \mathcal{M} dans laquelle Ω_K est unité.

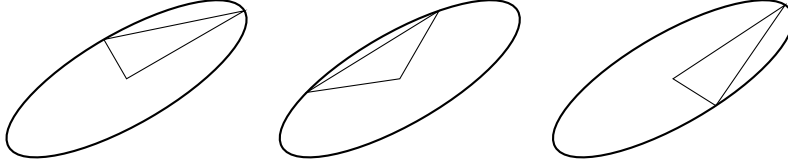


Figure 3.4 Éléments unités dans une métrique représentée par son ellipsoïde associé. Figure adaptée de [1].

Définition 8. Un ensemble d'éléments continus $\mathcal{M}(\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in \Omega}$ sur un domaine Ω définit un **maillage continu** $\mathcal{M}(\cdot)$ sur Ω , c'est-à-dire un espace riemannien $(\Omega, \mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$.

Un maillage continu n'est donc rien d'autre qu'une fonction qui associe à chaque point du domaine, une matrice : $\mathcal{M} : \mathbf{x} \in \Omega \mapsto \mathcal{M}(\mathbf{x})$. Localement, ces matrices sont définies par leur orientation et les tailles le long des directions principales, soit les vecteurs et valeurs propres :

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{x}) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \mathcal{R}(\mathbf{x})^T = \mathcal{R}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(\mathbf{x})} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{h_n^2(\mathbf{x})} \end{pmatrix} \mathcal{R}(\mathbf{x})^T.$$

Elles sont complètement définies par les paramètres $(\mathcal{R}, h_1, \dots, h_n)$. Tout comme un élément continu caractérise un élément discret local, un maillage continu permet de modéliser les maillages discrets unités pour le champ de métriques $\mathcal{M}(\cdot)$. On peut de nouveau faire un

lien entre cette modélisation continue et les maillages discrets à l'aide de paramètres locaux et globaux : pour les maillages discrets, ces paramètres sont l'orientation et la taille des éléments, ainsi que le nombre de nœuds. Pour un maillage continu, on dispose d'une matrice d'orientation, et on introduit les termes de *densité* et de *ratio d'anisotropie* :

Proposition 2. *Un maillage continu $\mathcal{M}(\cdot)$ peut s'écrire à l'aide des paramètres locaux suivants :*

— la densité d

$$d = \left(\prod_{i=1}^n h_i \right)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\det \mathcal{M}}$$

est l'inverse du volume de la boule unité de \mathcal{M} . Elle permet de contrôler la précision du maillage, en modifiant les tailles des éléments tout en maintenant les orientations et les ratios d'anisotropie inchangés,

— les ratios d'anisotropie

$$r_i = h_i \left(\prod_{j=1}^n h_j \right)^{-\frac{1}{n}}$$

sont une généralisation du ratio d'anisotropie dans le plan, selon les deux directions h_1 et h_2 . Plutôt que de considérer des ratios de longueurs en dimensions supérieures, ils sont définis comme des ratios de volumes, pour éviter de privilégier certaines directions.

En décomposant les tailles h_i dans l'expression de $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ pour faire apparaître ces paramètres, on a pour h_1 :

$$r_1 = \left(\frac{h_1^n}{h_1 \dots h_n} \right)^{\frac{1}{n}} = h_1 \left(\frac{1}{h_1 \dots h_n} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad d = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \rightarrow h_1 = r_1 d^{-\frac{1}{n}},$$

soit $h_1^{-2} = r_1^{-2} d^{\frac{2}{n}}$, et la métrique locale s'écrit alors

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = d^{\frac{2}{n}}(\mathbf{x}) \mathcal{R}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} r_1^{-2}(\mathbf{x}) & & \\ & \ddots & \\ & & r_n^{-2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \mathcal{R}(\mathbf{x})^T.$$

La densité permet de définir un autre paramètre global très utile pour les calculs de convergence :

Définition 9. *La complexité \mathcal{C} d'un maillage continu est définie par*

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} d(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sqrt{\det \mathcal{M}(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x}.$$

La complexité est analogue au nombre de sommets d'un maillage discret, et représente la taille du maillage continu. Pour les maillages anisotropes non structurés, ce paramètre est l'extension de la taille de maille h , définie sur les maillages structurés, et utilisée dans l'analyse d'erreur pour les calculs de convergence en maillages. Les calculs de convergence sur des maillages anisotropes seront donc basés sur la complexité, plutôt que sur la taille de maille qui perd de son sens.

3.1.5 Maillage unité

Le maillage continu est donc un support mathématique utilisé pour la résolution de problèmes continus, comme l'optimisation de fonctionnelle, qui sera développée plus loin, et comme donnée transmise au générateur de maillage anisotrope. En effet, le rôle du mailleur anisotrope est de construire *un* élément de la classe d'équivalence des maillages discrets unités pour un maillage continu donné. À l'aide de l'élément discret unité décrit précédemment, on détaille ici la définition derrière un maillage unité et les problèmes associés.

Définition 10. *Un **maillage discret** est **unité** pour un maillage continu $\mathcal{M}(\cdot)$ si tous ses éléments sont unités dans les métriques locales \mathcal{M} .*

On a vu que pour toute métrique, il existe au moins un élément unité associé. Ce résultat n'est malheureusement pas valable pour le maillage au complet. On peut s'en convaincre avec un argument géométrique : avec la transformation bijective $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$, on peut se restreindre à chercher un maillage unité pour la métrique associée à la matrice identité I . La question de l'existence d'un maillage unité dans l'espace (\mathbb{R}^2, I) est équivalente à trouver un agencement d'éléments unités, *c.-à-d.* des triangles équilatéraux réguliers, qui pavent le plan. Bien qu'il existe un pavage du plan avec des triangles réguliers, il a été montré par Fedorov [44] que seuls cinq polyèdres pavent l'espace, mais les tétraèdres réguliers n'en font pas partie : il n'existe donc pas toujours de maillage unité associé à un maillage continu en trois dimensions. Il est néanmoins possible de paver l'espace avec des tétraèdres non réguliers [45].

Il est donc nécessaire de relaxer la définition de maillage unité pour pouvoir en construire également en trois dimensions. Sur base de considérations algorithmiques et géométriques [46], on définit un élément *quasi-unité* :

Définition 11. *Soit le simplexe $\Omega_K \subset \mathbb{R}^n$ défini par ses sommets $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1})$. En notant ses arêtes $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i$, Ω_K est un **élément quasi-unité** dans une métrique \mathcal{M} si*

$$l_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}_{ij}) \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right], \quad \forall i \neq j.$$

Cette seule définition n'est cependant pas suffisante pour garantir l'existence d'un maillage unité : elle autorise en effet la construction d'un tétraèdre dégénéré de volume nul, dont toutes les arêtes sont incluses dans $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right]$. En pratique, les mailleurs anisotropes utilisent également un critère de contrôle de volume pour évaluer la qualité d'un maillage, en plus du contrôle des arêtes. Un histogramme est renvoyé après l'adaptation et montre la répartition des éléments selon leur valeur du critère de qualité Q_K qui compare le tétraèdre au tétraèdre régulier, d'arêtes unitaires. Dans Frey & George [46], ce critère est par exemple défini par

$$Q_K = C \frac{\left(\sum_{1 \leq i < j \leq 6} l_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}_{ij})^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{|\Omega_K|_{\mathcal{M}}},$$

où $|K|_{\mathcal{M}}$ désigne le volume du tétraèdre dans la métrique et C est une constante de normalisation. Puisque le volume d'un tétraèdre régulier vaut $\sqrt{2}/12$ et que les longueurs d'arêtes sont égales à 1, on a $C = \frac{\sqrt{2}}{6^{\frac{3}{2}}12}$. Dans Loseille [1], le critère de qualité est présenté comme $Q'_K = Q_K^{-\frac{2}{3}}$, soit

$$Q'_K = \frac{36}{3^{\frac{1}{3}}} \frac{|\Omega_K|_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3}}}{\sum_{1 \leq i < j \leq 6} l_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}_{ij})^2}.$$

Dans le logiciel d'adaptation **Mmg3d**, le critère Q_K est utilisé pour évaluer les maillages isotropes uniquement [25]. Pour les maillages anisotropes, une métrique moyenne est calculée sur l'élément en prenant la moyenne des métriques aux sommets selon la formule suivante :

$$\mathcal{M}_{moy} = \frac{1}{4} \left(\prod_{i=1}^4 \mathcal{M}_i^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.6)$$

Le critère de qualité est finalement calculé comme suit :

$$Q_{K,Mmg} = \frac{\left(\sum_{1 \leq i < j \leq 6} \mathbf{a}_{ij}^T \mathcal{M}_{moy} \mathbf{a}_{ij} \right)^3}{\sqrt{\det \mathcal{M}_{moy}} |\Omega_K|_I},$$

où le numérateur n'est autre que la longueur des arêtes mesurée dans la métrique moyenne et $|\Omega_K|_I$ désigne le volume du tétraèdre dans l'espace euclidien. On note que $Q'_K \in [0, 1]$, alors que Q_K et $Q_{K,Mmg} \in [1, \infty]$: ces deux derniers représentent en réalité la *dégradation* des éléments, où un élément de volume nul fait exploser le critère de qualité. On peut finalement souligner que le facteur $\sqrt{\det \mathcal{M}_{moy}}$ est le jacobien de la transformation entre un élément dans la métrique I et l'élément dans la métrique \mathcal{M} , et représente un ratio de volume.

Remarque 1. Équi-répartition de l'erreur

Dans le cas de l'adaptation isotrope, l'adaptation est basée sur une carte de taille obtenue en imposant l'équi-répartition de l'erreur sur les éléments du maillages. Pour des éléments \mathcal{P}^1 anisotropes, on peut montrer que l'on a, pour certaines fonctions, une expression exacte pour l'erreur en norme \mathbf{L}^1 . Si Ω_K est un élément unité dans la métrique \mathcal{M} et H_u désigne la hessienne de la solution, alors :

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^1(\Omega_K)} = \frac{\sqrt{3}}{64} \left(\det \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \right) \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H_u \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}).$$

Par contre, pour des interpolants de degré plus élevé, on a seulement la majoration :

$$\|u - \Pi_h^k u\|_{L^p(\Omega_K)} \leq C \|\text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}})^{\frac{k+1}{2}}\|_{L^p(\Omega_K)}$$

et l'équi-répartition n'est plus garantie. Ici, \mathcal{Q} désigne la matrice associée à la forme quadratique majorant l'erreur locale, voir section 3.2.

3.1.6 Opérations sur les métriques

On explicite brièvement deux opérations utiles sur les matrices associées aux tenseurs métriques. D'une part, l'intersection de métriques est nécessaire lorsque l'on se base sur plus d'une variable pour mener l'adaptation de maillage. Chaque variable est caractérisée par sa métrique en chaque sommet : l'intersection $\mathcal{M}_{1 \cap 2}$ fournit une unique métrique permettant de prescrire les tailles locales. D'autre part, l'interpolation de métriques donne une évaluation $\mathcal{M}(t)$ du tenseur selon les métriques des sommets adjacents.

Réduction simultanée

Les opérations d'intersection et d'interpolation de métriques définies ci-dessous peuvent s'obtenir par des opérations sur les valeurs propres des formes diagonalisées de \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . On cherche alors à construire une base orthogonale dans laquelle les matrices associées à ces métriques sont diagonales. Comme les matrices sont symétriques, une telle base existe, voir [47], et peut être construite en diagonalisant l'opérateur $f_1^{-1} f_2$, où f_1 et f_2 sont les applications linéaires associées aux deux métriques. On écrit la matrice \mathcal{N} associée à cet opérateur :

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{M}_2.$$

Les vecteurs propres de \mathcal{N} forment alors une base orthogonale dans laquelle \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont diagonales. Dans la suite, on note \mathcal{P} la matrice formée par ces vecteurs propres.

Intersection

L'opération d'intersection la plus évidente est basée sur les cercles unités associés aux matrices \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . En notant λ_i les valeurs propres de \mathcal{M}_1 et μ_i les valeurs propres de \mathcal{M}_2 , les cercles unités associés à ces métriques s'écrivent dans la base associée à \mathcal{N} :

$$\begin{aligned}\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 &= 1, \\ \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 &= 1.\end{aligned}$$

La plus grande ellipse incluse dans ces deux ellipses unités est obtenue en choisissant la plus grande valeur propre selon chaque direction principale, soit :

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = (\mathcal{P}^{-1})^T \begin{pmatrix} \max(\lambda_1, \mu_1) & 0 \\ 0 & \max(\lambda_2, \mu_2) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad (3.7)$$

On note $\mathcal{M}_{1 \cap 2}$ la métrique résultant de cette intersection, voir figure 3.5.

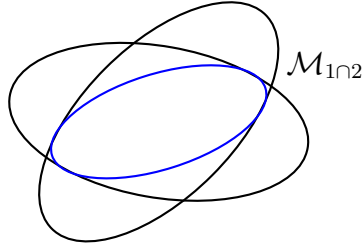


Figure 3.5 Métrique intersection

Remarque 2. L'intersection d'un nombre $k > 2$ de métriques n'est pas une opération commutative. En effet, suivant l'ordre appliqué, les ellipses finales diffèrent quelque peu en volume et directions principales. Lorsque l'intersection de métrique est appliquée à plus de deux variables, l'ellipse optimale peut être définie comme celle maximisant le volume et le(s) ratio(s) d'anisotropie.

Interpolation

L'interpolation de métrique permet de définir en tout point d'un segment \mathbf{ab} , paramétré par $t \in [0, 1]$, une métrique $\mathcal{M}(t)$, variant de manière monotone entre $\mathcal{M}(\mathbf{a})$ et $\mathcal{M}(\mathbf{b})$. Une expression possible pour $\mathcal{M}(t)$ est donnée [46] par l'équation (3.8), sur base des tailles interpolées $h_i(t)$.

$$\mathcal{M}(t) = (\mathcal{P}^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2(t)} \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad (3.8)$$

Les fonctions d'interpolation $h_i(t)$ sont finalement choisies suivant l'application : une variation linéaire, par exemple, s'écrit $h_i(t) = h_{\mathbf{a},i} + t(h_{\mathbf{b},i} - h_{\mathbf{a},i})$.

Remarque 3. *L'interpolation de métrique est principalement utilisée par les générateurs de maillages pour projeter l'information aux noeuds insérés, et pour mesurer par exemple les critères de qualité, voir (3.6). Elle n'est pas employée spécifiquement dans nos applications, et est donc donnée à titre informatif.*

3.2 Modèle d'erreur pour éléments d'ordre élevé

On cherche à modéliser localement le comportement de l'erreur d'interpolation, dans le voisinage d'un point du domaine. Comme mentionné précédemment, la principale difficulté pour des interpolants d'ordre élevé provient de la nature de l'erreur. Pour des fonctions suffisamment régulières, leur développement en série de Taylor fait intervenir des structures de plus en plus complexes pour représenter les dérivées d'ordre supérieur : par exemple, un tenseur d'ordre trois est nécessaire pour écrire les dérivées partielles associées à l'erreur d'interpolation quadratique. Outre la complexité inhérente à l'utilisation de tels objets mathématiques, il n'existe plus de correspondance entre l'écriture du tenseur métrique d'ordre deux, sous forme de matrice symétrique définie positive, et ces tenseurs d'ordre supérieur. De plus, contrairement à l'interpolation \mathcal{P}_1 , le cas des éléments d'ordre élevé pose un problème supplémentaire de par le nombre de méthodes d'interpolation possibles : il nous faut trouver un modèle local assez général que pour inclure l'interpolation de Lagrange, de Hermite, de Lobatto, etc.

L'approche utilisée consiste à supposer qu'autour d'un point \mathbf{a} , l'erreur est raisonnablement bien représentée par un polynôme homogène, *c.-à-d.* dont tous les termes sont du même degré, de degré $k + 1$, que l'on note $p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$. Afin de déduire une métrique, on cherche ensuite une forme quadratique définie positive approchant au mieux la courbe du modèle d'erreur. Cette forme quadratique est obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation, pour lequel deux méthodes de résolution sont considérées. Des travaux récents [22] ont également suggéré de tirer profit d'une décomposition des tenseurs symétriques d'ordre > 2 , mais cette option n'a pas été explorée.

Remarque 4. Cette supposition sur la modélisation de l'erreur est motivée par l'existence du développement en série de Taylor pour des fonctions suffisamment régulières, et par des résultats sur l'erreur d'interpolation a priori dans le cas de fonctions moins régulières :

- Pour une fonction $u \in C^{k+1}$, le terme de reste du développement en série de Taylor s'écrit comme un polynôme homogène de degré $k + 1$, voir équation (3.9). Ce polynôme peut être utilisé pour estimer l'erreur locale.

$$|u(\mathbf{x}) - \Pi_k u(\mathbf{x})| = \frac{1}{(k+1)!} d^{(k+1)}u|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{k+1}) \quad (3.9)$$

Le terme $d^{(k+1)}u|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ désigne la différentielle de u d'ordre $k + 1$ évaluée en $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$: il s'agit bien d'un polynôme homogène, comme le montre l'exemple pour $k = 1$, équation (3.10), avec les coefficients donnés par l'équation (3.11).

$$d^{(2)}u|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = c_{20}(x - x_0)^2 + 2c_{11}(x - x_0)(y - y_0) + c_{02}(y - y_0)^2 \quad (3.10)$$

$$c_{ij} = \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^j} \Big|_{\mathbf{x}_0} \quad (3.11)$$

- Si u n'est pas suffisamment différentiable, on peut utiliser une borne sur l'erreur d'interpolation anisotrope donnée par Formaggia & Perotto [11], équation (3.12). Cette borne est alors utilisée pour modéliser l'erreur locale, et est également un polynôme homogène des variables h_1 et h_2 , les tailles selon les directions x et y par rapport à l'élément de référence.

$$|u - \Pi_k u|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega_K)} \leq C \sum_{|\alpha|=k+1-m} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega_K)} \quad (3.12)$$

Dans l'équation (3.12), α est un multi-indice défini par (α_1, α_2) et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\mathbf{W}^{p,q}(\Omega_K)$ désigne l'espace de Sobolev défini sur l'élément Ω_K par

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega_K) = \left\{ u \in \mathbf{L}^p(\Omega_K) \mid \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial \mathbf{x}^\alpha} \in \mathbf{L}^p(\Omega_K) \text{ pour } |\alpha| \leq m \right\}.$$

3.2.1 Majoration de l'erreur locale

En un sommet $\mathbf{a} \in \Omega$, on cherche à approximer le comportement du polynôme $p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ par une forme quadratique définie positive, notée $\mathcal{Q}(\mathbf{a})$, élevée à la puissance $(k+1)/2$:

$$|p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})| \leq |\mathbf{x}^T \mathcal{Q}(\mathbf{a}) \mathbf{x}|^{\frac{k+1}{2}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

L'application de deux principes géométriques suffit à déterminer le problème d'optimisation à résoudre pour $Q(\mathbf{x})$ [1, 22] : le principe de *cohérence* (parfois appelé *consistance*) assure que la forme quadratique obtenue est bien une borne supérieure de l'erreur d'interpolation, alors que le principe d'*optimalité* permet de sélectionner la borne la plus serrée. On mentionne également le principe de *taille minimale maximale*, qui tente de maximiser la plus petite direction principale : ce critère revient à maximiser le ratio d'anisotropie de la métrique construite. Cependant, comme mentionné dans [22], ce dernier critère peut contredire les deux premiers lorsque le ratio d'anisotropie maximal ne maximise pas le volume de l'ellipsoïde associé à \mathcal{Q} et n'est donc pas détaillé ici.

Cohérence

Comme décrit plus haut, ce principe vérifie que la métrique cherchée majore l'erreur locale. Ceci est assuré en comparant les boules de rayon $\varepsilon > 0$ associées à chaque entité. Pour comparer les mesures d'erreur dans le modèle local $p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ et dans la forme quadratique

\mathcal{Q} , on introduit des mesures de distance normalisées : dans un voisinage du point \mathbf{x}_0 , l'erreur peut être donnée par

$$d_p(\mathbf{x}) = |p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})|^{\frac{1}{k+1}},$$

dans le modèle polynomial, et par

$$d_{\mathcal{Q}}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathcal{Q}(\mathbf{a}) \mathbf{x}},$$

dans la forme quadratique. On dit qu'une métrique \mathcal{Q} est un modèle *cohérent* pour l'erreur locale si, pour une valeur d'erreur ε , la boule de rayon ε de \mathcal{Q} est incluse dans celle de p , c'est-à-dire :

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_{\mathcal{Q}}(\mathbf{x}) \leq \varepsilon\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_p(\mathbf{x}) \leq \varepsilon\},$$

qui assure donc qu'un niveau d'erreur ε sera atteint plus rapidement par la forme quadratique associée à \mathcal{Q} . L'homogénéité de p et de la forme quadratique nous permet de vérifier uniquement le cas $\varepsilon = 1$, voir Proposition 3.

Proposition 3. *Comme $p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ et $\mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x}$ sont respectivement des fonctions homogènes de degré $k+1$ et de degré 2, le principe de cohérence est satisfait si la boule unité associée à $d_{\mathcal{Q}}$ est incluse dans la boule unité associée à d_p .*

Preuve. On considère la boule unité de $d_{\mathcal{Q}}$ et la mise à l'échelle $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/\varepsilon$:

$$\{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2 \mid d_{\mathcal{Q}}(\mathbf{x}') \leq 1\} \subset \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2 \mid d_p(\mathbf{x}') \leq 1\}$$

Comme $d_{\mathcal{Q}}$ et d_p sont des fonctions homogènes, on peut extraire ε des fonctions distance :

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{\varepsilon^{-2}} d_{\mathcal{Q}}(\mathbf{x}) \leq 1\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\varepsilon^{-(k+1)})^{\frac{1}{k+1}} d_p(\mathbf{x}) \leq 1\}$$

En divisant chaque côté par $\sqrt{\varepsilon^{-2}} = (\varepsilon^{-(k+1)})^{\frac{1}{k+1}} = \varepsilon^{-1}$:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_{\mathcal{Q}}(\mathbf{x}) \leq \varepsilon\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_p(\mathbf{x}) \leq \varepsilon\}.$$

On a donc bien équivalence entre les deux inclusions. □

En utilisant directement l'erreur et non les distances, la dernière inclusion s'écrit

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x} \leq \varepsilon^2\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |p_{k+1}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon^{k+1}\},$$

et implique que pour une valeur d'erreur $\varepsilon \leq 1$, on a $|p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})| \leq |\mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x}|^{\frac{k+1}{2}}$. Le principe

de cohérence est illustré de manière géométrique sur la figure 3.6.

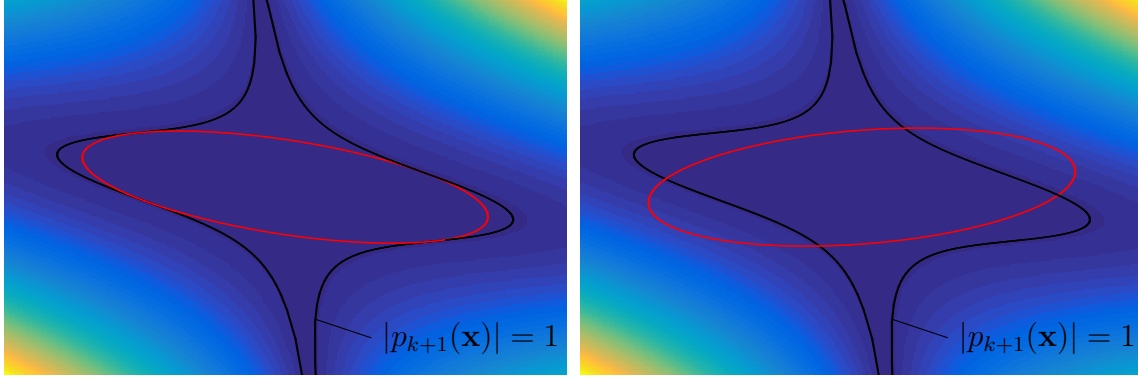


Figure 3.6 À gauche, l'ellipse associée à une métrique respectant le principe de cohérence : elle est entièrement incluse dans la courbe de niveau 1 de p , en noir. À droite, une métrique qui ne majore pas partout le polynôme d'erreur.

Optimalité

Bien que le principe de cohérence soit nécessaire pour obtenir une majoration de l'erreur, il admet une infinité de métriques comme solution : pour une métrique \mathcal{M}_1 satisfaisant le principe de majoration de l'erreur, toute métrique $a\mathcal{M}_1$ avec $a > 1$ le satisfait également. D'un point de vue géométrique, les boules unités des métriques $a\mathcal{M}_1$ sont incluses les unes dans les autres pour des valeurs croissantes de a , avec pour limite la boule unité réduite au sommet lui-même, voir figure 3.7. Comme mentionné précédemment, le volume des éléments

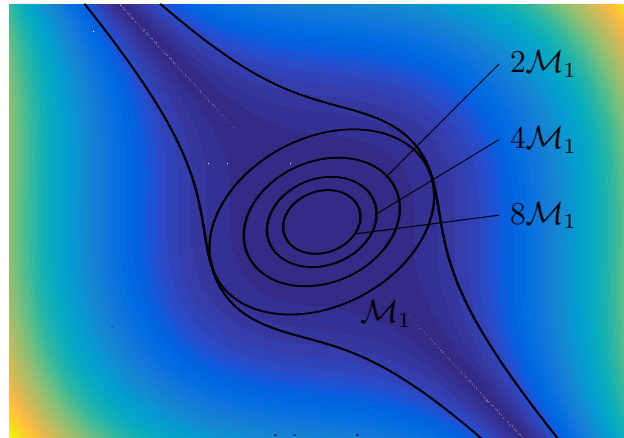


Figure 3.7 Suite de métriques $\mathcal{M}_i = a_i\mathcal{M}_1$ satisfaisant le principe de majoration de l'erreur

unités associés à ces métriques est inversement proportionnel au déterminant $\det a\mathcal{M}_1$, alors que la complexité du maillage continu est proportionnelle à $\det a\mathcal{M}_1$. Pour obtenir le meilleur taux de convergence possible, il est nécessaire de minimiser le nombre d'éléments du maillage,

ce qui revient à maximiser leur volume, ou minimiser la complexité $\mathcal{C}(\mathcal{M}_1)$: ces deux choix reviennent donc à minimiser le déterminant de la métrique. Pour deux métriques \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 satisfaisant le principe de cohérence, on dit que \mathcal{M}_1 est un meilleur choix de métrique que \mathcal{M}_2 si

$$\det \mathcal{M}_1 \leq \det \mathcal{M}_2.$$

3.2.2 Un problème de minimisation

Ces principes se traduisent sous la forme d'un problème de minimisation du déterminant sous la contrainte imposée par le principe de cohérence, *i.e.*, de majoration de l'erreur. Pour chaque sommet \mathbf{a} , on résout le problème non linéaire (3.13), sous contraintes linéaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathcal{Q}} \det \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q} \text{ symétrique def. positive} \\ |p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})| \leq |\mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x}|^{\frac{k+1}{2}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

On peut choisir de fixer le niveau d'erreur $|p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})|$ à 1 pour la contrainte de cohérence : le principe sera alors vérifié pour les autres courbes de niveau par homogénéité. Avec ce choix, le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathcal{Q}} \det \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q} \text{ symétrique def. positive} \\ \mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x} \geq 1, \quad \forall \mathbf{x} \text{ t.q. } |p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})| = 1, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Il s'agit d'un problème continu avec une contrainte à vérifier pour tous les vecteurs de l'espace, ce qui est évidemment impossible à résoudre en pratique. On considère donc sa forme discrétisée dans les cas 2D et 3D, pour laquelle plusieurs méthodes de résolution ont été proposées :

- dans les travaux de Hecht & Kuate [20], le problème discret est résolu dans le cas 2D. On considère la matrice \mathcal{Q} paramétrée par trois nombres réels a, b et c :

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix},$$

avec $a > 0$ et $\det \mathcal{Q} = ab - c^2/4 > 0$ pour avoir \mathcal{Q} symétrique définie positive. Plutôt que de tester tous les points de la courbe de niveau $|p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})| = 1$, on considère sa discrétisation en n points de coordonnées $X_i = (x_i, y_i)$, de sorte que le problème (3.13)

s'écrit sous la forme discrète (3.15).

$$\begin{cases} \min_{a,b,c} 4ab - c^2 \\ a > 0, 4ab > c^2 \\ ax_i^2 + cx_iy_i + by_i^2 \geq 1, \quad \forall i \in [1, \dots, n]. \end{cases} \quad (3.15)$$

Une méthode de résolution approchée est donnée dans [20], où l'ellipse optimale est insérée dans la courbe de niveau 1, à une tolérance ϵ près, voir figure 3.8. En chaque point X_i , une **résolution algébrique** fournit un déterminant "minimal" possible. L'ensemble des points de la courbe est alors balayé en conservant le plus petit de ces déterminants : cette méthode s'apparente donc à une **méthode brute force** où toutes les valeurs possibles sont testées. La résolution algébrique est fastidieuse, tout comme son implémentation numérique. En particulier, la solution fait intervenir en chaque point de la courbe discrétisée les déterminants $x_iy_0 - x_0y_i$ de la transformation d'un point de référence (x_0, y_0) vers le point courant, ce qui pose problème lorsque ces points sont alignés. Des précautions doivent donc être prises afin d'éviter des annulations fortuites.

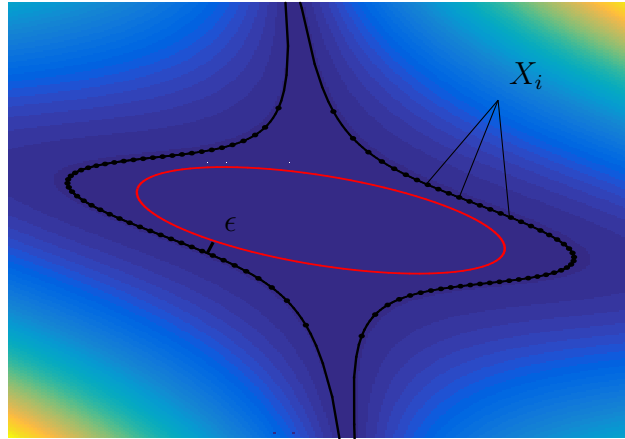


Figure 3.8 Insertion de l'ellipse de volume maximal dans la courbe de niveau 1 de $p_{k+1}(\mathbf{x})$ à une tolérance ϵ

- dans Coulaud & Loseille [21], le problème discret est résolu en 3D, et l'application en 2D est immédiate. Le problème non-linéaire et mal posé² initial est transformé en un problème linéaire bien posé au moyen du logarithme de la matrice \mathcal{Q} , défini sur base

2. Entre deux points de la courbe discrétisée, il est toujours possible d'insérer une ellipse avec un demi-axe arbitrairement petit, dont le volume tend vers l'infini.

de sa diagonalisation $\mathcal{Q} = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{R}^T$, équation (3.16).

$$\mathcal{L} = \ln \mathcal{Q} = \mathcal{R} \ln \Lambda \mathcal{R}^T \Rightarrow \det \mathcal{Q} = \exp(\text{trace } \mathcal{L}) \quad (3.16)$$

Au vu du caractère monotone de l'exponentielle, il suffit alors de minimiser la trace de \mathcal{L} , qui est bien un problème linéaire. Par contre, les contraintes initialement linéaires sont transformées en contraintes fortement non-linéaires : ces contraintes sont alors approchées par un jeu de contraintes linéaires. L'intersection des n contraintes forme un polyèdre dans \mathbb{R}^3 (2D) ou dans \mathbb{R}^6 (3D), dans lequel se trouve la solution admissible : l'**algorithme du simplexe** est utilisé pour résoudre le problème linéaire approché.

- Enfin, une partie importante des travaux de Mbinku [22] présente deux méthodes de **décomposition de tenseurs symétriques** d'ordre élevé (n^{th} -order tensors) représentant l'erreur d'interpolation d'ordre $k \geq 2$. L'une est basée sur le théorème de Sylvester pour la décomposition de polynômes homogènes en somme de puissances de formes linéaires ; l'autre méthode est une extension de la décomposition en valeurs singulières (*SVD*) aux tenseurs d'ordres supérieurs pour construire une décomposition canonique associée à un polynôme homogène de même ordre (méthode *CP - Canonical decomposition/multi-way Parallel factor*). Ces deux méthodes fournissent des résultats similaires et retournent les ellipsoïdes de volume maximal selon les "bonnes" directions principales.

Remarque 5. *Il n'est pas clair comment les directions principales sont incluses dans les méthodes 1 et 2. Néanmoins, certains auteurs [22] recommandent de déduire les directions principales d'une forme diagonalisée du modèle d'erreur, c'est-à-dire de la diagonalisation de tenseurs symétriques, plutôt que maximiser la plus petite direction principale. Notons que cette manière de procéder est analogue au cas linéaire, où la métrique est alignée avec les directions de la hessienne.*

Les deux premières méthodes, la méthode algébrique de Hecht & Kuate, et la méthode dite *log-simplexe* de Coulaud & Loseille, ont été implémentées et testées sur plusieurs applications. On détaille ici leur mise en oeuvre et les algorithmes. Chaque méthode calcule la matrice \mathcal{Q} qui est incluse dans la courbe de niveau 1 des polynômes d'erreur. Cette matrice est calculée en chaque sommet du maillage. Une fois calculé, le champ de métriques sera mis à l'échelle : on conserve l'orientation des éléments, mais la densité est adaptée de manière à rencontrer la contrainte de complexité (proportionnelle au nombre de nœuds).

3.2.3 Méthode algébrique

Cette méthode est utilisée pour le calcul des métriques en deux dimensions. La généralisation en 3D, bien que possible, est lourde à mettre en oeuvre et n'a pas été implémentée. On rappelle le problème de minimisation sous sa forme discrétisée³ :

$$\begin{cases} \min_{a,b,c} 4ab - c^2 \\ a > 0, 4ab > c^2 \\ ax_i^2 + cx_iy_i + by_i^2 \geq 1, \quad \forall i \in [1, \dots, n]. \end{cases}$$

La première étape consiste à discrétiser la courbe de niveau 1 du polynôme homogène p_{k+1} , supposé connu⁴ : on cherche donc une suite de n points de coordonnées (x_i, y_i) satisfaisant

$$|p_{k+1}(x_i, y_i; \mathbf{a})| = 1.$$

Par souci de clarté, on note simplement ce polynôme $p(x, y)$, en sous-entendant le degré et le sommet de référence. Comme le polynôme est homogène, on tire profit de l'écriture en coordonnées polaires, $X_i = (r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)$ de la façon suivante :

$$|p(x_i, y_i)| = |p(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)| = |r_i^{k+1} p(\cos \theta_i, \sin \theta_i)| = 1,$$

d'où on obtient pour les r_i :

$$r_i = \left(\frac{1}{|p(\cos \theta_i, \sin \theta_i)|} \right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

On peut donc déterminer les points X_i en discrétisant le cercle unité en n angles $\theta_i \in [0, 2\pi[$, $1 \leq i \leq n$, puis en calculant les rayons associés. Notons qu'on exclut la valeur 2π redondante pour des questions de stabilité de l'algorithme⁵.

3. Dans l'article [20], la contrainte $b > 0$ vient s'ajouter au problème. Elle n'est toutefois pas strictement nécessaire pour garantir une matrice \mathcal{Q} définie positive : le critère de Sylvester impose uniquement la positivité des 2 mineurs principaux, soit $\det(a) = a$ et $\det \mathcal{Q} = ab - c^2/4$.

4. En pratique, ce polynôme est reconstruit sur un patch d'éléments entourant le sommet courant, en projetant au sens des moindres carrés la solution éléments finis sur l'espace des polynômes d'ordre $k+1$, voir section 3.4

5. Lors du calcul des composantes a, b, c , on évalue en chaque point X_i le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_i & x_0 \\ y_i & y_0 \end{vmatrix}$$

par rapport au point X_0 le plus proche de l'origine. Cela pose problème si deux points sont confondus...

Pour chaque point X_i , deux valeurs du paramètre b sont calculées sur base d'une résolution algébrique du problème discrétisé (3.15). Les paramètres a et c sont exprimés comme des fonctions linéaires de b :

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 + \alpha_2 b \\ c &= \alpha_3 - \alpha_4 b, \end{aligned}$$

avec les valeurs des α_i donnée dans l'algorithme 1. Les deux valeurs pour b sont insérées dans une expression modifiée du déterminant, et la valeur minimisant cette expression est retenue. Le triplet (a, b, c) maximisant l'aire de l'ellipse est conservé. Enfin, la contrainte linéaire $ax_j^2 + cx_jy_j + by_j^2 \geq 1$ est vérifiée pour ce triplet vis-à-vis de tous les autres points X_j . L'algorithme complet est détaillé, algorithme 1.

3.2.4 Méthode log-simplexe

La méthode dite *log-simplexe*, proposée par Coulaud & Loseille [21], consiste à considérer le logarithme de la métrique \mathcal{Q} , équation (3.16), pour remplacer le problème non-linéaire initial

$$\begin{cases} \min_{\mathcal{Q}} \det \mathcal{Q} \\ \mathbf{x}_i^T \mathcal{Q} \mathbf{x}_i \geq 1 \end{cases}$$

par le problème linéaire

$$\begin{cases} \min_{\mathcal{L}} \exp(\text{trace } \mathcal{L}) \Leftrightarrow \min_{\mathcal{L}} \text{trace } \mathcal{L} \\ \mathbf{x}_i^T \exp(\mathcal{L}) \mathbf{x}_i \geq 1. \end{cases}$$

Les contraintes faisant maintenant intervenir une exponentielle, on cherche à construire un ensemble de contraintes linéaires approchées. On rappelle la définition de \mathcal{L} , équation (3.16) :

$$\mathcal{L} = \ln \mathcal{Q} = \mathcal{R} \ln \Lambda \mathcal{R}^T = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & \\ & \ln \lambda_2 \end{pmatrix} \mathcal{R}^T,$$

et on note $\mu_i = \ln \lambda_i$ ses valeurs propres, on note M la matrice diagonale associée. On effectue le changement de variable $\bar{\mathbf{x}} = \mathcal{R}^T \mathbf{x}$ pour exprimer \mathbf{x} dans la base propre de \mathcal{L} , on modifie ensuite les contraintes comme suit :

$$\mathbf{x}^T \exp(\mathcal{L}) \mathbf{x} \geq 1 \iff \mathbf{x}^T \mathcal{R} \exp(M) \mathcal{R}^T \mathbf{x} \geq 1 \iff \bar{\mathbf{x}}^T \exp(M) \bar{\mathbf{x}} \geq 1.$$

Algorithme 1 : Calcul des paramètres (a, b, c) selon la méthode algébrique

Input : cercle unité discrétisé θ_i , polynôme d'erreur $p(x, y)$, tolérances ε et ε_0 .

Output : coefficients de la métrique A, B, C .

```

for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
     $r_i \leftarrow \left( \frac{1}{|p(\cos \theta_i, \sin \theta_i)|} \right)^{\frac{1}{k+1}}$ 
end

 $R_0 \leftarrow \left( \frac{r_0}{r_0 - \varepsilon_0} \right)^2$ 

for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
     $\det_{xy} \leftarrow x_i y_0 - x_0 y_i$ 
     $R_i \leftarrow \left( \frac{r_i}{r_i - \varepsilon} \right)^2$ 

     $b \leftarrow \left( \frac{\det_{xy}}{x_i x_0} \right)^2 \bigg/ \left( 2 \frac{R_i^2}{x_i^2} + 2 \frac{R_0^2}{x_0^2} \right)$ 
     $a \leftarrow \frac{1}{\det_{xy}} \left( \frac{y_0}{x_i} R_i^2 - \frac{y_i}{x_0} R_0^2 \right) + \frac{y_i y_0}{x_i x_0} b$ 
     $c \leftarrow \frac{1}{\det_{xy}} \left( \frac{x_i}{x_0} R_0^2 - \frac{x_0}{x_i} R_i^2 \right) - \frac{x_0 y_i + x_i y_0}{x_i x_0} b$ 

    for  $j \leftarrow 1$  to  $n, j \neq i$  do
        if  $a x_j^2 + c x_j y_j + b y_j^2 < 1$  then
            break % Contrainte de cohérence non respectée
        end
    end

    if  $ab - c^2/4 < AB - C^2/4$  then
         $(A, B, C) \leftarrow (a, b, c)$ 
    end
end

```


Dans la base propre, le produit devient :

$$\bar{\mathbf{x}}^T \exp(M) \bar{\mathbf{x}} \geq 1 \longleftrightarrow \sum_{i=1}^2 e^{\mu_i} \bar{x}_i^2 \geq 1$$

En divisant de chaque côté par le carré de la norme euclidienne de $\bar{\mathbf{x}}$ (on note que $\|\bar{\mathbf{x}}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$, puisque la rotation ne modifie pas la norme) :

$$\sum_{i=1}^2 e^{\mu_i} \frac{\bar{x}_i^2}{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2} \geq \frac{1}{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2}$$

On cherche à éliminer l'exponentielle de cette expression : comme $\exp(x)$ est une fonction convexe, on utilise le théorème suivant [48] :

Théorème 1. (Inégalité de Jensen discrète.)

Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et soient $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$. Alors

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n),$$

pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

Preuve. Voir [48] pour la preuve. □

En prenant pour α les ratios $\bar{x}_i^2 / \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 \in [0, 1]$ et $\sum \bar{x}_i^2 / \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 = \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 / \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 = 1$, on peut appliquer ce résultat :

$$\sum_{i=1}^2 e^{\mu_i} \frac{\bar{x}_i^2}{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2} \geq \exp \left(\sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{\bar{x}_i^2}{\|\bar{\mathbf{x}}\|^2} \right) = \exp \left(\frac{\mathbf{x}^T \mathcal{L} \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \right)$$

pour obtenir l'expression finale approchée, équations (3.17).

$$\exp \left(\frac{\mathbf{x}^T \mathcal{L} \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) \geq \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \longleftrightarrow \frac{\mathbf{x}^T \mathcal{L} \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \geq \ln((\|\mathbf{x}\|^2)^{-1}) \longleftrightarrow \mathbf{x}^T \mathcal{L} \mathbf{x} \geq -\|\mathbf{x}\|^2 \ln(\|\mathbf{x}\|^2) \quad (3.17)$$

On obtient alors le problème discret (3.18) sous forme logarithmique.

$$\begin{cases} \min_{\mathcal{L}} \text{trace } \mathcal{L} \\ \mathbf{x}_i^T \mathcal{L} \mathbf{x}_i \geq -\|\mathbf{x}_i\|^2 \ln(\|\mathbf{x}_i\|^2). \end{cases} \quad (3.18)$$

En traduisant ce problème en fonction des paramètres a, b, c , comme précédemment, on a

finalemt le problème (3.19).

$$\begin{cases} \min_{a,b} a + b \\ ax_i^2 + 2cx_iy_i + by_i^2 \geq -\|\mathbf{x}_i\|^2 \ln(\|\mathbf{x}_i\|^2). \end{cases} \quad (3.19)$$

Remarque 6.

- Ici, les termes diagonaux de \mathcal{L} sont c , et non $c/2$.
- Notons que contrairement à la matrice originale \mathcal{Q} symétrique définie positive, la matrice \mathcal{L} obtenue après minimisation est tout à fait quelconque. On récupère toutefois une matrice définie positive $\mathcal{Q} = \exp(\mathcal{L})$, puisque toutes les valeurs propres $\exp(\mu_i)$ sont strictement positives.
- Le problème 3.19 est bien posé : en effet, s'il existe au moins deux points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ formant une base orthogonale de \mathbb{R}^2 et satisfaisant la contrainte, alors il existe une constante C telle que $\text{trace } \mathcal{L} \geq C$, bornant ainsi le volume maximal de l'ellipse insérée. Voir [21] pour la démonstration.

Comme mentionné précédemment, chacune des n contraintes forme un plan ou hyperplan, dont l'intersection est un polyèdre de \mathbb{R}^3 (pour le cas 2D, la matrice \mathcal{Q} symétrique est composée de trois paramètres indépendants) ou \mathbb{R}^6 (six paramètres pour une matrice symétrique en 3D) dans lequel se trouve la solution admissible : celle-ci est déterminée par l'algorithme du simplexe⁶ [50].

Algorithme du simplexe

On considère un problème d'optimisation linéaire sous forme canonique, équation (3.20), avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'inconnues, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ les coefficients de la fonction coût à maximiser, et les contraintes linéaires $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{cases} \quad (3.20)$$

6. Dans MATLAB, la résolution se fait à l'aide du solveur d'optimisation linéaire `linprog` (option `'dual-simplex'`). Dans le programme d'éléments finis, on utilise la bibliothèque `SoPlex` (Sequential Object-oriented simplex) [49].

Pour la résolution de (3.19), on a directement :

$$\mathbf{x} = (a, c, b), \quad \mathbf{c} = (1, 0, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\|\mathbf{x}_1\|^2 \ln(\|\mathbf{x}_1\|^2) \\ \vdots \\ -\|\mathbf{x}_n\|^2 \ln(\|\mathbf{x}_n\|^2) \end{pmatrix}.$$

Le problème de minimisation est alors résolu avec l'algorithme du simplexe. Pour plus d'informations sur l'implémentation, voir [50]. La métrique \mathcal{Q} est finalement reconstruite en prenant l'exponentielle matricielle de \mathcal{L} , équation (3.21), avec M la matrice diagonale des valeurs propres.

$$\mathcal{Q} = \exp(\mathcal{L}) = \mathcal{R} \exp(M) \mathcal{R}^T \quad (3.21)$$

Algorithme itératif

Les contraintes non-linéaires étant approchées par (3.17), la métrique \mathcal{Q} obtenue après résolution de (3.19) n'est pas la métrique optimale. En effet, les points (x_i, y_i) utilisés pour construire les contraintes linéaires sont les mêmes que pour la méthode algébrique, soit n points tels que $|p(x_i, y_i)| = 1$, ce qui perd son sens pour la nouvelle expression des contraintes. La solution suggérée est de tirer profit de la métrique \mathcal{Q} calculée pour effectuer de manière itérative le changement de variable associé à la transformation (3.5), soit $\bar{\mathbf{x}} = \mathcal{Q}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}$. Ce faisant, on se place dans l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \mathcal{Q}_j)$ pour la résolution du problème initial. On cherche donc à construire une suite de points $(\mathbf{x}_i^j)_{1 \leq i \leq n}$ convergeant vers les points $(\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de la contrainte initiale. Soit $(\mathbf{z}_i)_{1 \leq i \leq n} = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ un ensemble de points sur le cercle unité, on considère non plus la courbe de niveau 1 de $p(\mathbf{z}_i)$, mais plutôt de $p(\mathcal{Q}_j^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}_i)$, l'évaluation de la courbe d'erreur sur le cercle unité de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{Q}_j)$. Pour une métrique \mathcal{Q}_j , les points $(x_i, y_i) = (r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)$ situés sur la courbe de niveau 1 de $p \circ \mathcal{Q}_j^{-\frac{1}{2}}$ sont obtenus par la transformation (3.22).

$$r_i^j = \left| \frac{1}{p(\mathcal{Q}_j^{-\frac{1}{2}} (\cos \theta_i \sin \theta_i)^T)} \right|^{\frac{1}{k+1}} \rightarrow x_i^j = \frac{z_i}{|p(\mathcal{Q}_j^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}_i)|^{\frac{1}{k+1}}} \quad (3.22)$$

On résout alors le problème (3.19) avec les nouvelles contraintes (\mathbf{x}_i^j) , et on applique finalement la transformation inverse $\mathcal{Q}_j^{\frac{1}{2}}$ à la matrice solution \mathcal{L}_{j+1} pour retrouver la métrique dans l'espace d'origine $(\mathbb{R}^2, \mathcal{I})$, équation (3.23).

$$\mathcal{Q}_{j+1} = \mathcal{Q}_j^{\frac{1}{2}} \exp(\mathcal{L}_{j+1}) \mathcal{Q}_j^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

On peut montrer [21] que si la suite de métriques \mathcal{Q}_j converge vers une métrique \mathcal{Q} , alors les points (\mathbf{x}_i^j) convergent vers (\mathbf{x}_i) , les points de la contrainte du problème original, comme illustré sur la figure 3.10. En pratique, on doit donc observer que la matrice \mathcal{L} tende vers 0 au fil des itérations :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \ln(\mathcal{Q}_{j-1}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Q}_j \mathcal{Q}_{j-1}^{-\frac{1}{2}}) = \ln(\mathcal{I}) = 0.$$

La procédure complète est détaillée par l'algorithme 2. La figure 3.9 montre deux ellipsoïdes insérés dans la surface d'erreur de niveau 1 avec cet algorithme, pour des éléments \mathcal{P}^1 et \mathcal{P}^2 en trois dimensions.

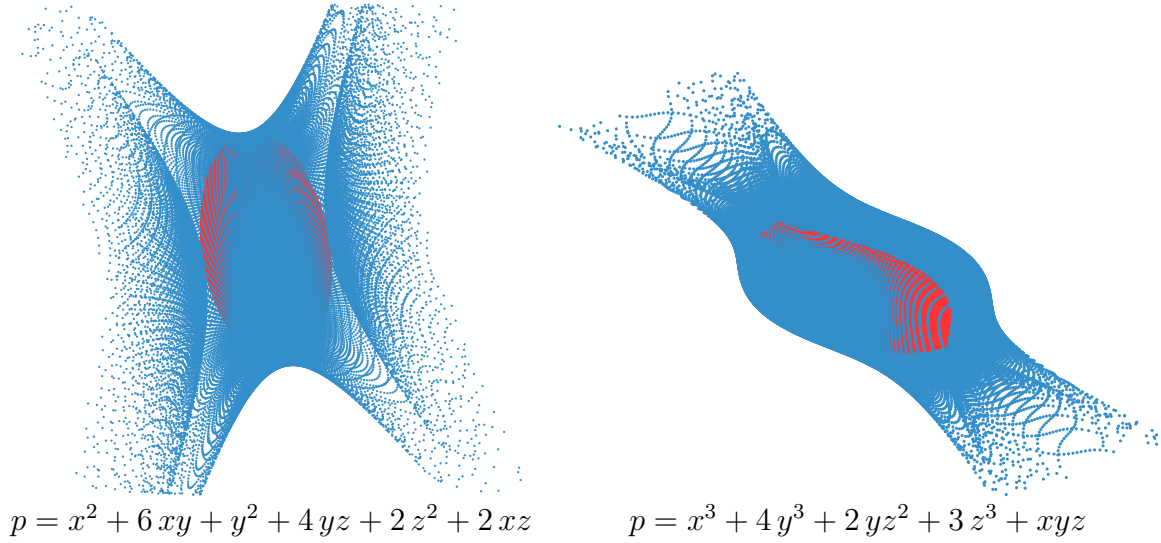


Figure 3.9 Métriques optimales associées à la surface de niveau 1 pour le polynôme d'erreur en 3D. À gauche, erreur homogène de degré deux associée à un interpolant \mathcal{P}^1 . À droite, polynôme de degré trois. Les points en bleu sont répartis sur l'isosurface $|p_{k+1}(x, y, z)| = 1$, et les ellipsoïdes associés à la métrique sont dessinés en rouge.

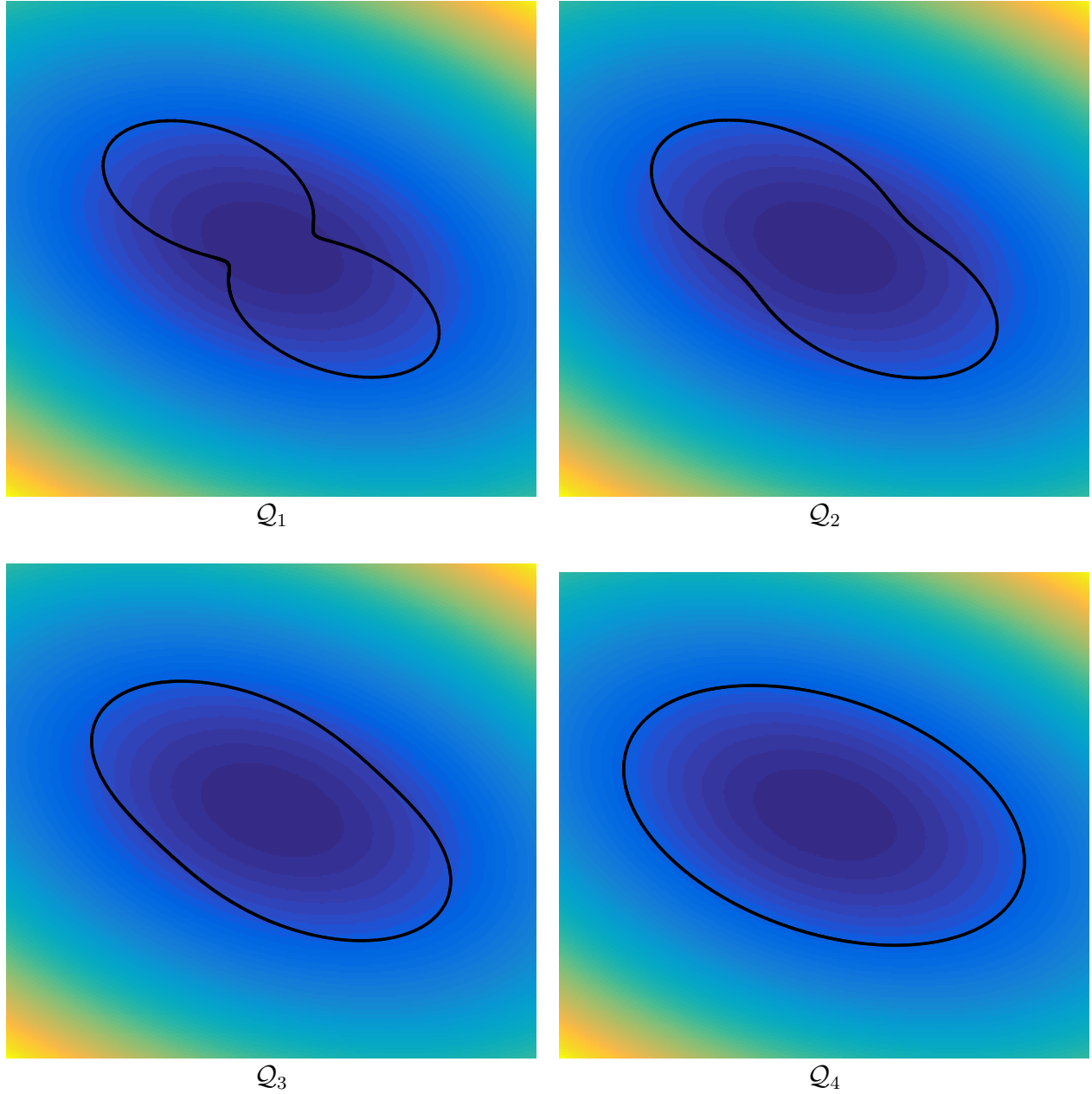


Figure 3.10 Convergence des points de la contrainte modifiée vers les points de la contrainte initiale pour le polynôme d'erreur $p(x, y) = x^2 + 0.5xy + 0.5y^2$. De haut en bas et de gauche à droite, évolution des points $(\mathbf{x}_i^j)_j$ de la contrainte approchée par l'hypothèse de convexité pour une suite de métriques $\mathcal{Q}_{1 \rightarrow 4}$ tendant vers la métrique exacte $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_4$. Les points de la contrainte modifiée coïncident avec la contrainte initiale, soit la courbe $|p(x, y)| = 1$, en bas à droite.

Algorithme 2 : Calcul de la métrique \mathcal{Q} selon la méthode log-simplexe

Input : cercle unité discrétisé $\mathbf{z}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, polynôme d'erreur $p(x, y)$, nombre maximum d'itérations n_{max} , tolérance sur le résidu matriciel ϵ .

Output : métrique \mathcal{Q} .

$\mathbf{c} = (1, 0, 1)$

$j \leftarrow 0$

$\mathcal{Q}_0 \leftarrow \mathcal{I}$

while $j < n_{max}$ and $res > \epsilon$ **do**

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$\mathbf{x}_i^j \leftarrow \frac{\mathbf{z}_i}{|p(\mathcal{Q}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}_i)|^{\frac{1}{k+1}}}$

$A(i, 1) \leftarrow (x_i^j)^2$ *% Matrice des contraintes linéaires*

$A(i, 2) \leftarrow x_i^j y_i^j$

$A(i, 3) \leftarrow (y_i^j)^2$

$b_i \leftarrow -\|\mathbf{x}_i^j\|^2 \ln(\|\mathbf{x}_i^j\|^2)$ *% Membre de droite de l'inégalité*

end

% Minimiser $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ sous contrainte $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$

$\mathcal{L}_{j+1} \leftarrow \text{simplexe}(\mathbf{c}, A, \mathbf{b})$

$\mathcal{Q}_{j+1} \leftarrow \mathcal{Q}_j^{\frac{1}{2}} \exp(\mathcal{L}_{j+1}) \mathcal{Q}_j^{\frac{1}{2}}$

$res \leftarrow \|\mathcal{Q}_{j+1} - \mathcal{Q}_j\|_F$

$j \leftarrow j + 1$

end

3.3 Métrique optimale pour adaptation multi-échelles

Une fois le modèle d'erreur obtenu, une forme quadratique associée à une matrice \mathcal{Q} , on cherche à déterminer un maillage offrant un contrôle sur l'erreur d'interpolation. Plus précisément, pour une fonction u , on cherche le maillage optimal minimisant globalement la norme \mathbf{L}^p de l'erreur d'interpolation de degré k . Ce problème peut être abordé d'un point de vue discret, *c.-à-d.* en cherchant le meilleur maillage discret possible, ou du point de vue du maillage continu introduit précédemment.

Le problème discret consiste à chercher le maillage optimal \mathcal{T}_{opt} anisotrope et minimisant la norme de l'erreur d'interpolation sur le domaine de calcul. Pour éviter une solution triviale où le nombre d'éléments du maillage n'est pas borné, on ajoute une contrainte sur le nombre de noeuds du maillage discret. On reprend la formulation du problème d'optimisation global tel que proposé par Loseille [1], équation (3.24).

$$\text{Trouver } \mathcal{T}_{opt} \text{ comportant } N \text{ sommets tel que } \mathcal{T}_{opt} = \arg \min_{\mathcal{T}_h} \|u - \Pi_h^k u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \quad (3.24)$$

Le maillage \mathcal{T}_{opt} est donc celui qui minimise l'erreur parmi tous les maillages \mathcal{T}_h possibles. Ici, la norme de l'erreur est une somme des intégrales sur les éléments et s'écrit

$$\|u - \Pi_h^k u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left(\sum_K \|u - \Pi_h^k u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega_K)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_K \int_{\Omega_K} |u(\mathbf{x}) - \Pi_h^k u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La résolution du problème (3.24) consiste à optimiser simultanément les coordonnées des N sommets et la topologie du maillage, *c.-à-d.* la connectivité des éléments. En plus d'être mal posé – le maillage optimal n'est pas unique pour une fonction donnée –, ce problème est évidemment totalement impossible à résoudre en pratique. De plus, les méthodes utilisées en pratique se basent sur des estimés locaux : estimés de l'erreur, de la forme optimale des éléments, etc. Elles font ensuite usage d'algorithmes similaires à l'algorithme du gradient ou de la plus forte pente, qui ne garantissent qu'un optimum local : il n'est donc pas garanti que le maillage obtenu soit le maillage minimisant l'erreur d'interpolation.

Le cadre théorique construit autour des *métriques optimales* aborde la version continue du problème (3.24), où l'on cherche un maillage continu, un champ de métriques $\mathbf{M}_{opt} = (\mathcal{M}_{opt}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$, minimisant la norme de l'erreur sur le domaine, problème (3.25). La notation $\pi_h^k u$ désigne l'équivalent continu de la fonction d'interpolation $\Pi_h^k u$, voir [1].

$$\text{Trouver } \mathbf{M}_{opt} \text{ de complexité } N \text{ tel que } \mathbf{M}_{opt} = \arg \min_{\mathcal{M}} \|u - \pi_h^k u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \quad (3.25)$$

On est naturellement amené à définir une fonctionnelle $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, dépendant de la métrique locale, de sorte que l'on puisse réécrire le problème (3.25) sous la forme :

$$\mathbf{M}_{opt} = \arg \min_{\mathcal{M}} \mathcal{E}(\mathcal{M}) \iff \mathcal{E}(\mathcal{M}_{opt}) = \min_{\mathcal{M}} \mathcal{E}(\mathcal{M}).$$

C'est ici que l'introduction fastidieuse au concept de maillage continu montre son intérêt : sur les structures définies précédemment, le calcul des variations est un outil puissant pour la résolution du problème continu. En effet, pour une fonctionnelle objectif suffisamment simple (par exemple linéaire), une résolution analytique est possible⁷. Les méthodes d'optimisation disponibles, comme la résolution des équations d'Euler-Lagrange, permettent de garantir un optimum global sous la forme d'un champ de métriques optimal. Quand l'erreur d'interpolation est exprimée en norme \mathbf{L}^p , cette fonctionnelle peut s'écrire :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \left(\int_{\Omega} |e_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.26)$$

où $e_{\mathcal{M}}$ représente une majoration de l'erreur locale. Elle est définie dans la section ci-dessous.

3.3.1 Erreur locale en norme \mathbf{L}^∞

À la section 3.2, deux méthodes ont été présentées pour construire une forme quadratique majorant le polynôme d'erreur local. Cette forme matricielle est nécessaire pour relier l'erreur d'interpolation de degré quelconque avec le tenseur métrique, qui est intrinsèquement un tenseur d'ordre deux. On cherche maintenant à majorer, à son tour, cette forme quadratique dans le voisinage d'un sommet \mathbf{a} . En ce sens, la majoration $e_{\mathcal{M}}$ est définie comme la valeur maximale atteinte par le modèle d'erreur dans la boule unité $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ centrée en \mathbf{a} , équation (3.27).

$$e_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})} |u(\mathbf{x}) - \pi_h^k u(\mathbf{x})| \quad (3.27)$$

En utilisant plutôt le maillage discret comme support, cette quantité s'écrit au moyen de la norme infinie de l'erreur sur les éléments de $\mathcal{B}_h(\mathbf{a})$, le patch⁸ centré en \mathbf{a} :

$$e_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}) = \max_{\Omega_K \in \mathcal{B}_h(\mathbf{a})} \|u(\mathbf{x}) - \Pi_h^k u(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_K)}$$

7. Dans le cas de fonctionnelles plus complexes ou non-linéaires, une résolution analytique n'est pas toujours possible et l'on a recours à l'algorithme du gradient, par exemple, pour déterminer une suite de métriques \mathcal{M}_i tendant vers un optimum. Il faut toutefois ajouter des contraintes non-linéaires $\det \mathcal{M}_i > 0$ au problème pour conserver des matrices définies positives lors de la résolution, ce qui rend la tâche beaucoup plus ardue.

8. Voir section 3.4 pour la définition des patches.

Notons qu'avec cette définition de $e_{\mathcal{M}}$, le problème d'optimisation global revient simplement à minimiser l'erreur maximale sur les éléments. On calcule ce maximum à partir de la forme quadratique associée à \mathcal{Q} , équation (3.28), notre objectif étant d'éliminer le max tout en incluant la métrique inconnue \mathcal{M} dans l'expression de $e_{\mathcal{M}}$.

$$e_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})} \left(\mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x} \right)^{\frac{k+1}{2}} \quad (3.28)$$

Pour ce faire, on utilise le résultat de la Proposition 4 :

Proposition 4. *L'erreur d'interpolation est maximale lorsque ses directions sont alignées avec celles de la matrice \mathcal{Q} . Dans cette base propre, le modèle local d'erreur s'écrit :*

$$e_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}) = \left(\text{trace} \left(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \right) \right)^{\frac{k+1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 q_i \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

Preuve. Voir annexe A pour la preuve. □

3.3.2 Calcul des variations et métrique optimale

Nous avons maintenant tous les éléments en main pour déterminer le champ de métriques optimal \mathbf{M}_{opt} pour notre fonctionnelle d'erreur. Avec l'expression obtenue pour l'erreur locale $e_{\mathcal{M}}$, le problème d'optimisation à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{opt} &= \arg \min_{\mathcal{M}} \mathcal{E}(\mathcal{M}) = \arg \min_{\mathcal{M}} \left(\int_{\Omega} |e_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \arg \min_{h_i} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n h_i(\mathbf{x})^2 q_i(\mathbf{x}) \right)^{\frac{p(k+1)}{2}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

sous la contrainte de complexité, qui s'écrit avec les variables h_i :

$$\mathcal{C}(\mathbf{M}) = \int_{\Omega} d(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \prod_{i=1}^n h_i^{-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = N. \quad (3.30)$$

Avec cette écriture, les tailles h_i sont maintenant les variables de calcul : on rappelle que la métrique est complètement déterminée par les h_i , voir section 3.1. On a également souligné dans cette écriture la dépendance en \mathbf{x} des différents termes. Dans la littérature [1, 22], la solution est présentée pour le modèle d'erreur général paramétré par α et β :

$$e_{\mathcal{M}} = \left(\sum_{i=1}^n h_i^{\beta} q_i(\mathbf{x}) \right)^{\alpha} \quad (3.31)$$

Pour s'affranchir de la contrainte non-linéaire, on procède à un changement de variables, en exprimant les tailles h_i selon les paramètres de densité d et de ratio d'anisotropie r_i introduits précédemment. Pour rappel, ces paramètres sont définis par :

$$d(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n h_i^{-1}(\mathbf{x})$$

$$r_i(\mathbf{x}) = h_i(\mathbf{x}) \left(\prod_{j=1}^n h_j(\mathbf{x}) \right)^{-\frac{1}{n}}$$

On dispose ici de n ratios d'anisotropie et de la densité, soit un total de $n + 1$ variables. Pour éviter des variables redondantes, on n'utilise que les $n - 1$ premiers ratios, menant ainsi au changement :

$$(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (d, r_1, \dots, r_{n-1})$$

Avec ces variables, la contrainte est linéaire en d , équation (3.30), et le modèle d'erreur s'écrit :

$$e_{\mathcal{M}} = d^{-\frac{\alpha\beta}{n}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} r_i^\beta q_i + P^{-\beta} q_n \right)^\alpha, \quad (3.32)$$

avec P le produit des ratios, $P = \prod_{i=1}^{n-1} r_i$. Le problème (3.29) - (3.30) avec le modèle général (3.31) est résolu de manière formelle en exprimant les conditions de stationnarité sous forme des équations d'Euler-Lagrange : les ratios d'anisotropie locaux sont d'abord calculés avec des variations compatibles δr ; la densité est ensuite déduite et normalisée afin de satisfaire la contrainte. On réfère aux travaux de Loseille [1] pour la preuve complète.

Les résultats du calcul d'optimisation de la fonctionnelle sont la densité et les $n - 1$ ratios optimaux, desquels on construit de manière équivalente les valeurs propres de la métrique optimale locale $\mathcal{M}_{opt}(\mathbf{x})$. Cette métrique optimale est décrite par la Proposition 5, sans doute le résultat le plus important de ce chapitre :

Proposition 5. *La métrique locale optimale en dimension n , minimisant la norme \mathbf{L}^p de l'erreur d'interpolation exprimée par le modèle (3.31), paramétré par α et β , est donnée par :*

$$\mathcal{M}_{opt}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_q(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{x}) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \mathcal{R}_q(\mathbf{x})^T, \quad (3.33)$$

où les valeurs propres s'écrivent :

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = N^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} \left(\prod_{j=1}^n q_j(\mathbf{x}) \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha \beta p + n}} \right)^{-\frac{2}{n}} \left(\prod_{j=1}^n q_j(\mathbf{x}) \right)^{\frac{-2}{\beta(\alpha \beta p + n)}} q_i^{\frac{2}{\beta}}(\mathbf{x}), \quad (3.34)$$

où \mathcal{R}_q désigne la matrice des vecteurs propres de la matrice \mathcal{Q} , et les q_i désignent ses valeurs propres. La métrique \mathcal{M}_{opt} est alignée avec \mathcal{Q} , et, en fixant $\alpha = (k+1)/2$ et $\beta = 2$ pour nos applications, elle s'écrit plus simplement sous la forme

$$\mathcal{M}_{opt}(\mathbf{x}) = N^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} (\det \mathcal{Q}(\mathbf{x}))^{\frac{p(k+1)}{2(p(k+1)+n)}} \right)^{-\frac{2}{n}} (\det \mathcal{Q}(\mathbf{x}))^{\frac{-1}{p(k+1)+n}} \mathcal{Q}(\mathbf{x}). \quad (3.35)$$

Finalement, le champ de métriques optimal, solution du problème introductif (3.25), est le champ défini en chaque point $\mathbf{x} \in \Omega$ par la métrique optimale \mathcal{M}_{opt} , soit

$$\mathbf{M}_{opt} = (\mathcal{M}_{opt}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}. \quad (3.36)$$

Preuve. Voir [1] pour la preuve. □

Avant de détailler l'implémentation de ce modèle et ses applications, on donne trois résultats intéressants sur \mathcal{M}_{opt} , Proposition 6.

Proposition 6. *Le champ de métriques optimal \mathbf{M}_{opt} existe, est unique et minimise la fonctionnelle $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ définie par la relation 3.26.*

Preuve. On donne simplement une idée de la preuve. L'existence du champ de métrique est montrée par la Proposition 5, qui en est une preuve constructive⁹. Il faut ensuite montrer que $\mathcal{E}(\mathbf{M}_{opt}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{M})$ pour tout \mathbf{M} : ceci se fait à l'aide de la propriété de concavité de la fonction logarithme. On applique ensuite l'inégalité de Hölder pour conclure que \mathbf{M}_{opt} est le minimisant. Finalement, la fonctionnelle objectif étant strictement convexe, l'unicité de la fonction est garantie [51]. □

C'est sur cette expression de la métrique que se basent nos applications en adaptation de maillages anisotrope.

9. Même en l'absence de preuve constructive, l'existence d'une solution est garantie puisque la contrainte $\mathcal{C}(\mathbf{M}) = N$ définit un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n , et la fonctionnelle objectif tend vers l'infini lorsque $|h_i| \rightarrow \infty$, voir [51] pour un théorème d'existence.

3.3.3 Convergence dans la métrique optimale

On conclut les développements relatifs au champ de métriques optimal en donnant une expression du taux de convergence en maillage, pour des maillages non structurés anisotropes. Comme mentionné précédemment, le paramètre h , défini comme la taille maximale sur tous les éléments du maillage, n'a plus de sens lorsque les éléments sont étirés : on fait alors usage du nombre de sommets N , définition 12 [1].

Définition 12. Une suite de maillages continus (\mathcal{M}_N) en dimension n de complexité croissante $\mathcal{C}(\mathcal{M}_N) = N$ converge à l'ordre m en norme \mathbf{L}^p si

$$\|e_{\mathcal{M}_N}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^p} \leq C N^{-\frac{m}{n}} \quad (3.37)$$

Avec cette définition, on peut mener une étude du taux de convergence en maillage de manière similaire aux cas structurés, en considérant les maillages unités, générés par **Mmg2/3D**, associés aux maillages continus :

$$\mathcal{M}_N, \mathcal{M}_{2N}, \mathcal{M}_{4N}, \mathcal{M}_{8N}, \dots$$

Finalement, l'ordre de convergence théorique est donné [1] par la proposition 7 :

Proposition 7. L'ordre de convergence en maillage est donné par le produit des paramètres $\alpha\beta$. Pour le modèle d'erreur utilisé dans nos applications, on a donc $m = k + 1$.

Preuve. Les tailles optimales s'écrivent à partir des valeurs propres optimales (3.34) :

$$h_i = \lambda_i^{-\frac{1}{2}} = N^{-\frac{1}{n}} \left(\int_{\Omega} \left(\prod_{j=1}^n q_j(\mathbf{x}) \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p + n}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{j=1}^n q_j(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{\beta(\alpha\beta p + n)}} q_i^{-\frac{1}{\beta}}(\mathbf{x}).$$

On peut donc écrire explicitement l'erreur d'interpolation optimale :

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{M}_{opt}}(\mathbf{x}) &= \left(\sum_{i=1}^n h_i^{\beta} q_i(\mathbf{x}) \right)^{\alpha} \\ &= N^{-\frac{\alpha\beta}{n}} \underbrace{\left(\int_{\Omega} \left(\prod_{j=1}^n q_j(\mathbf{x}) \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p + n}} \right)^{\frac{\alpha\beta}{n}} \left(\prod_{j=1}^n q_j(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{(\alpha\beta p + n)}}}_{C(\mathbf{x})}^{\alpha} \\ &= C(\mathbf{x}) N^{-\frac{\alpha\beta}{n}}, \end{aligned}$$

et on peut finalement calculer la norme \mathbf{L}^p en intégrant la constante $C(\mathbf{x})$:

$$\|e_{\mathcal{M}_{opt}}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_{\Omega} \left(e_{\mathcal{M}_{opt}}(\mathbf{x}) \right)^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = N^{-\frac{\alpha\beta}{n}} \int_{\Omega} C(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = C_2 N^{-\frac{\alpha\beta}{n}}.$$

□

Le cadre théorique des métriques optimales pour l'adaptation anisotrope nous fournit donc naturellement un ordre de convergence en maillage, pour le modèle d'erreur considéré. On observe directement qu'une suite de maillages anisotropes d'éléments de degré k , adaptés avec la métrique optimale dérivée précédemment, présente un ordre de convergence de $k + 1$ en fonction de $N^{\frac{1}{2}}$ en 2D, et $N^{\frac{1}{3}}$ en 3D. Ce taux est à comparer avec les taux théoriques de la méthode des éléments finis, également basés sur l'erreur d'interpolation. On peut souligner que l'ordre de convergence a été obtenu à partir de l'information des interpolants uniquement, et indépendamment de la méthode utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles (méthode des éléments finis, volumes finis, etc.). Les applications numériques, au chapitre 4, utilisent ce cadre théorique en choisissant la méthode des éléments finis pour la résolution : le champ de métriques est extrait de la solution approchée pour procéder à l'adaptation de maillage.

3.4 Méthode de projection et estimation d'erreur

La construction du polynôme d'erreur $p(\mathbf{x})$, détaillée dans la section suivante, nécessite l'utilisation d'un opérateur de lissage pour projeter les dérivées dans des espaces de polynômes plus riches. Classiquement, ces opérateurs procèdent à la résolution, en chaque sommet, d'un problème de moindres carrés, où la solution (ou ses dérivées) est reconstruite à partir de ses valeurs nodales sur un patch d'éléments entourant le sommet. La méthode choisie dans ce travail est celle proposée par Zhang & Naga [52], détaillée ci-dessous. Étant donné un problème décrit par des équations aux dérivées partielles, on suppose ici qu'on a à notre disposition la solution discrète au problème abstrait¹⁰ (3.38) ou (3.39), obtenue par la méthode des éléments finis.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = b(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{array} \right. \quad (3.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ et } p \in P_h \text{ tels que} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) = g(q_h) \quad \forall q_h \in P_h \end{array} \right. \quad (3.39)$$

La formulation (3.38) peut par exemple désigner un problème de laplacien, et le problème (3.39) est un problème de point selle (le problème de Stokes, par exemple). On note $u_h^{(k)}$ la solution polynomiale par morceaux de degré k obtenue par éléments finis, et on cherche à construire une solution de degré supérieur $u_h^{(k+1)}$ définie sur des patches d'éléments, voir définition ci-dessous.

Méthode de reconstruction de Zhang & Naga

La méthode de reconstruction proposée par Zhang et Naga est dérivée de la méthode de Zhu-Zienkiewicz [33, 34] : sur base des valeurs ponctuelles de la solution calculée u_h , une reconstruction $R_h u_h$ est obtenue par projection par moindres carrés. Contrairement à la méthode de Zhu-Zienkiewicz, la projection se fait sur la solution u plutôt que sur les gradients ∇u . On présente d'abord la méthode originale qui se base sur une évaluation ponctuelle du résidu, puis une alternative plus robuste [53], qui minimise le résidu intégral sur chaque patch d'éléments. Par souci de clarté, la méthode est présentée pour une reconstruction sur un triangle en deux dimensions, mais la généralisation aux autres fonctions de base et aux autres dimensions est immédiate.

On cherche à construire un opérateur de reconstruction de la solution $R_h : \mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^{k+1}$ et un

10. Voir [38] pour une définition rigoureuse des formes et espaces mentionnés.

opérateur de reconstruction du gradient $G_h : \mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^k \times \mathcal{P}^k$. Le gradient sera obtenu à partir de la solution reconstruite. Pour obtenir des fonctions définies sur le domaine au complet, nous devons reconstruire la solution en trois types de nœuds : sommets, nœuds sur une arête et nœuds intérieurs. Les polynômes $R_h u_h^k \in \mathcal{P}_h^{k+1}$ et $G_h u_h^k \in \mathcal{P}^k \times \mathcal{P}^k$ sont alors étendus au reste du domaine à l'aide des fonctions d'interpolation.

Patches de nœuds et d'éléments

La reconstruction aux sommets est définie à l'aide d'un patch de nœuds comme support pour la projection. Ce patch, parfois appelé *boule topologique* du sommet, peut être défini en termes de nœuds ou d'éléments : on donne ici la définition de Zhang & Naga (nœuds), ainsi que la définition classique (éléments). Pour chaque sommet z_i , on note h_i la plus grande longueur des arêtes incidentes à z_i , soit

$$h_i = \max_{z'_i \in \mathcal{T}_h} \|z_i z'_i\|, \quad (3.40)$$

où \mathcal{T}_h est la triangulation et z'_i est un sommet connecté à z_i . Le patch de Zhang & Naga autour de z_i est l'ensemble des N nœuds du maillage inclus dans la boule

$$B_{h_i}(z_i) = \{z \in \mathcal{T}_h \mid \|z - z_i\| \leq h_i\}. \quad (3.41)$$

Dans nos applications, on utilise le patch en termes d'éléments, simplement défini comme l'ensemble des éléments du maillages possédant z_i comme sommet. La figure 3.11 illustre les deux types de patches. D'autres applications [54] nécessitent parfois des patches plus imposants et incluent les éléments périphériques à ceux inclus initialement.

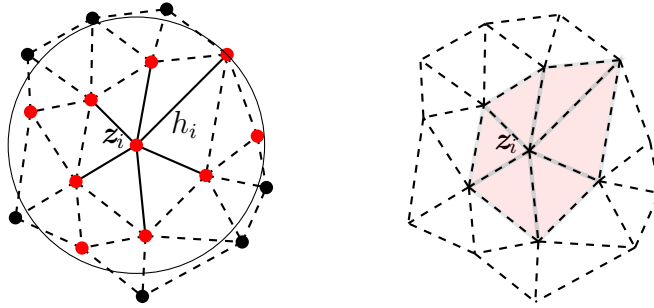


Figure 3.11 À gauche, le patch de nœuds introduit par Zhang & Naga : les nœuds en rouge sont inclus dans la boule de rayon h_i . À droite, la définition classique d'un patch d'éléments autour du sommet z_i .

Formulation discrète

La formulation discrète évalue les résidus ponctuels en un nombre de noeuds autour du sommet, équation (3.44) ci-dessous, et se base sur le patch en terme de noeuds. La solution reconstruite $R_h u_h^k$ est alors obtenue en ajustant un polynôme de degré $k+1$ à la solution u_h aux noeuds du patch, au sens des moindres carrés. Pour un simplexe en 2D, la dimension de la base polynômiale de degré $k+1$ est $(k+2)(k+3)/2$. Pour obtenir un problème bien posé, qui comporte autant d'équations que de termes dans la base, il faut donc $N \geq (k+2)(k+3)/2$. Dans le cas contraire, on considère successivement les noeuds dans la boule $B(\mathbf{z}_i, \alpha h_i)$ avec $\alpha > 1$ jusqu'à satisfaire la condition. Le polynôme à reconstruire pour chaque sommet s'écrit :

$$p_{k+1}(x, y | \mathbf{z}_i) = \mathbf{P}^T \mathbf{a}, \quad (3.42)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T &= (1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^{k+1}, x^k y, \dots, xy^k, y^{k+1}), \\ \mathbf{a}^T &= (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Les coordonnées locales (x, y) sont exprimées dans le repère du sommet \mathbf{z}_i , soit en utilisant (X, Y) pour le repère global :

$$(x, y) = (X - x_i, Y - y_i). \quad (3.43)$$

Pour éviter d'augmenter le conditionnement de la matrice des moindres carrés, une normalisation selon les dimensions de la boîte contenant le patch peut être appliquée aux coordonnées des noeuds. En notant $\mathbf{U} = (u_h(z_{i1}), \dots, u_h(z_{iN}))$, le problème de moindres carrés s'exprime alors sous sa forme discrète :

$$\min J(a_0, a_1, \dots, a_n) = \min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(U_i - p_{k+1}(x_i, y_i | \mathbf{z}_i) \right)^2, \quad (3.44)$$

qui, après avoir imposé les conditions de stationnarité, mène au système linéaire

$$\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{P}(x_i, y_i) \mathbf{P}(x_i, y_i)^T \right) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \mathbf{P} U_i, \quad (3.45)$$

ou de manière équivalente, en définissant la matrice $A_{1:N,i} = \mathbf{P}^T(x_i, y_i)$,

$$A^T A \mathbf{a} = A^T \mathbf{U}. \quad (3.46)$$

On remarque que pour obtenir un problème bien posé, les noeuds du patch doivent de plus être linéairement indépendants, ce qui n'est pas toujours garanti si le maillage initial est structuré. On définit alors la reconstruction et le gradient pour les sommets du maillage :

$$\begin{aligned} R_h u_h(\mathbf{z}_i) &= p_{k+1}(0, 0 | \mathbf{z}_i), \\ G_h u_h(\mathbf{z}_i) &= \nabla p_{k+1}(0, 0 | \mathbf{z}_i). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Pour un noeud entouré par les sommets $\mathbf{z}_{i,1}$, $\mathbf{z}_{i,2}$ et $\mathbf{z}_{i,3}$, la reconstruction et le gradient sont donnés par

$$\begin{aligned} R_h u_h(\mathbf{z}_i) &= \sum_{j=1}^3 c_j p_{k+1}(x_j, y_j | \mathbf{z}_{i,j}), \\ G_h u_h(\mathbf{z}_i) &= \sum_{j=1}^3 c_j \nabla p_{k+1}(x_j, y_j | \mathbf{z}_{i,j}), \end{aligned} \quad (3.48)$$

où les (x_j, y_j) désignent les coordonnées du sommet dans le repère centré en \mathbf{z}_j et avec les coefficients de pondération c_j tels que $\sum_{j=1}^3 c_j = 1$. En pratique, les fonctions d'interpolation géométrique sont utilisées. On remarque que l'on évalue les trois polynômes au noeud ciblé dans chacun des repères locaux avant de pondérer ces valeurs par la distance du noeud au sommet, ce qui n'est pas équivalent à prendre la moyenne des évaluations aux sommets.

On peut faire plusieurs commentaires par rapport à cette méthode de reconstruction :

- Sur des maillages structurés, les auteurs illustrent plusieurs cas de *super-convergence* [52], où le gradient reconstruit converge à des taux avantageux.
- Le nombre de noeuds nécessaires, et donc la dimension du système linéaire, augmente avec la dimension de la base polynomiale choisie. Pour des interpolants de degré élevé, le système linéaire à résoudre en chaque sommet peut devenir conséquent.
- Pour des sommets situés sur un bord rectiligne, des noeuds peuvent être colinéaires (la matrice A n'est pas de rang plein).
- Pour des sommets avec peu de voisins, il faut augmenter la taille de la boule, on peut donc perdre le caractère local de la reconstruction.

Formulation intégrale

Pour tenter de pallier ces problèmes, on considère également la forme intégrale du problème de moindres carrés, équation (3.49). L'intégrale étant calculée sur les éléments, le patch $\Omega_{\mathbf{z}_i}$ est ici exprimé en termes d'éléments.

$$\min J(a_0, a_1, \dots, a_n) = \min \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathbf{z}_i}} (u_h - p_{k+1}(x, y | \mathbf{z}_i))^2 \, d\Omega \quad (3.49)$$

Si Ω_{z_i} contient m éléments avec chacun k_g noeuds d'intégration, le système linéaire s'écrit :

$$\left[\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_g} J_j w_i \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & \dots & x_i^{k+1} & \dots & y_i^{k+1} \\ x_i & x_i^2 & x_i y_i & \dots & x_i^{k+1} x_i & \dots & x_i y_i^{k+1} \\ y_i & x_i y_i & y_i^2 & \dots & x_i^{k+1} y_i & \dots & y_i y_i^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i^{k+1} & x_i^{k+1} x_i & x_i^{k+1} y_i & \dots & x_i^{2k+2} & \dots & x_i^{k+1} y_i^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_i^{k+1} & x_i y_i^{k+1} & y_i y_i^{k+1} & \dots & x_i^{k+1} y_i^{k+1} & \dots & y_i^{2k+2} \end{pmatrix} \right] \mathbf{a} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_g} J_j w_i \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \\ y_i \\ \dots \\ x_i^{k+1} \\ \dots \\ y_i^{k+1} \end{pmatrix},$$

avec J_j le jacobien de l'élément j et x_i, y_i, w_i les points et poids d'intégration. Contrairement à la méthode discrète, un patch d'un seul élément suffit pour déterminer l'ensemble des coefficients de la reconstruction.

3.4.1 Estimateur pour l'erreur en norme \mathbf{L}^2

La solution reconstruite $\tilde{u}_h = R_h u_h$, ainsi que le gradient $\nabla \tilde{u}_h = G_h u_h$, peuvent finalement être utilisés afin d'estimer l'erreur d'approximation pour des problèmes sans solution analytique. Pour une fonction inconnue u , la norme \mathbf{L}^2 et la seminorme \mathbf{H}^1 s'écrivent :

$$\begin{aligned} \|e\|_{\mathbf{L}^2} &= \|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2} = \left[\int_{\Omega} (u - u_h)^2 \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ |e|_{\mathbf{H}^1} &= \|u - \nabla u_h\|_{\mathbf{L}^2} = \left[\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla u_h) \cdot (\nabla u - \nabla u_h) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On cherche à approximer ces normes par les estimateurs $\|\tilde{u}_h - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$ et $|\tilde{u}_h - u_h|_{\mathbf{H}^1}$. L'inégalité triangulaire permet d'écrire les relations :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2} + \|\tilde{u}_h - u_h\|_{\mathbf{L}^2} \\ \|u_h - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|u_h - u\|_{\mathbf{L}^2} + \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

qui donnent la borne suivante pour $\|u_h - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2}$:

$$\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2} - \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u_h - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2} + \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2}.$$

En divisant par $\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$, on a finalement l'encadrement (3.50).

$$1 - \frac{\|u - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2}}{\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}} \leq \frac{\|u_h - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2}}{\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}} \leq 1 + \frac{\|u - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2}}{\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}} \quad (3.50)$$

L'expression $\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$ est l'erreur d'approximation par éléments finis : les résultats classiques sur l'erreur d'interpolation [37] permettent d'écrire $\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ch^{k+1}$ pour une interpolation de degré k . On fait ici l'hypothèse que la reconstruction \tilde{u}_h , obtenue localement, approche mieux la fonction inconnue u que la solution u_h , soit :

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ch^{k+1+\alpha}, \quad \text{avec } \alpha > 0, \quad (3.51)$$

de sorte que les ratios dans (3.50) soient bornés par Ch^α . Sous cette hypothèse, on peut finalement écrire :

$$1 - \mathcal{O}(h^\alpha) \leq \frac{\|\tilde{u}_h - u_h\|_{\mathbf{L}^2}}{\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}} \leq 1 + \mathcal{O}(h^\alpha) \longrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{u}_h - u_h\|_{\mathbf{L}^2} = \|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2},$$

c'est-à-dire que l'estimateur $\|\tilde{u}_h - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$ est asymptotiquement exact. Dans nos calculs d'erreur, on utilisera cet estimateur comme approximation de la norme de l'erreur exacte :

$$\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2} \simeq \|\tilde{u}_h - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$$

Remarque 7. Dans toutes nos applications, on observe que l'hypothèse (3.51) est toujours respectée. Dans le cas de la seminorme \mathbf{H}^1 , plusieurs résultats de super-convergence [35, 52, 55] existent sous la forme :

$$|u - \tilde{u}_h|_{\mathbf{H}^1} \leq Ch^{k+\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

qui garantissent que l'estimateur $|\tilde{u}_h - u_h|_{\mathbf{H}^1}$ est asymptotiquement exact. Plusieurs conditions sont toutefois nécessaires pour obtenir ces résultats, notamment une fonction u suffisamment régulière (ce qui est souvent vérifié) et une certaine structure dans les éléments (ce qui n'est généralement pas le cas).

3.4.2 Vérification de la méthode de reconstruction

Pour valider l'implémentation de la méthode de reconstruction, on résout deux problèmes avec le code d'éléments finis EF : le premier est un problème de diffusion en 2D avec une solution analytique, le second est un écoulement 2D dans une cavité carrée, sans solution analytique disponible. Pour chacun, on illustre le comportement de l'estimateur d'erreur en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et on montre les ordres de convergence, obtenus en évaluant l'erreur sur une suite de maillages non structurés avec des tailles globales $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}, \dots$

Problème de diffusion 2D

En choisissant une fonction solution donnée par le champ bidimensionnel $f_1(x, y) = x^{10}y^{10}$ défini sur le carré $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, on utilise la méthode des solutions manufacturées pour construire un terme source et des conditions aux limites adéquates. On résout donc avec EF le problème aux limites (3.52)

$$\begin{cases} \Delta u = 90 x^8 y^8 (x^2 + y^2) & \text{dans } \Omega \\ u(x, y) = 1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.52)$$

Comme la solution exacte est disponible, on calcule pour chaque maillage la norme de l'erreur exacte $\|e\|_{\mathbf{L}^2} = \|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$ et de l'estimateur $\|\tilde{e}\|_{\mathbf{L}^2} = \|\tilde{u}_h - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$. Les courbes obtenues sont illustrées sur les figures 3.12 et 3.13 pour des maillages de triangles et de quadrangles avec différents degrés de fonctions d'interpolation. Les taux de convergence associés sont détaillés dans la table 3.1.

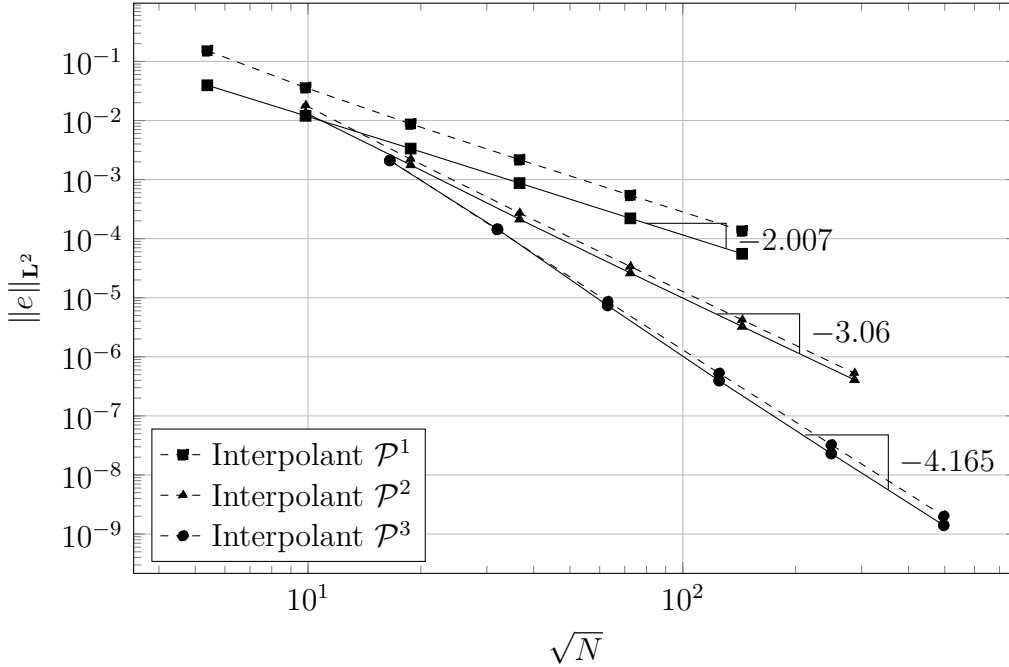


Figure 3.12 Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la fonction $f_1(x, y)$ pour des maillages de triangles de Lagrange \mathcal{P}^1 à \mathcal{P}^3 . Comparaison entre l'erreur exacte $\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$ (trait discontinu) et l'estimateur $\|\tilde{u} - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$ (trait plein).

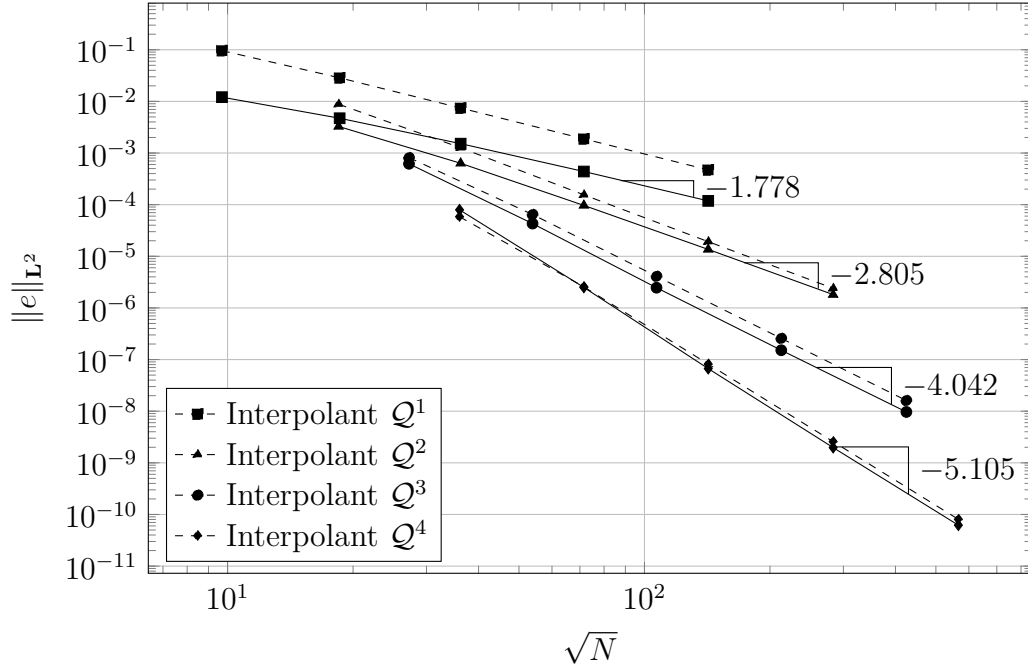


Figure 3.13 Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la fonction $f_1(x, y)$ pour des maillages de quadrangles spectraux \mathcal{Q}^1 à \mathcal{Q}^4 . Comparaison entre l'erreur exacte $\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$ (trait discontinu) et l'estimateur $\|\tilde{u} - u_h\|_{\mathbf{L}^2}$ (trait plein).

Tableau 3.1 Taux de convergence de l'estimateur d'erreur pour la fonction $f_1(x, y)$

	\mathcal{P}^1	\mathcal{P}^2	\mathcal{P}^3	\mathcal{Q}^1	\mathcal{Q}^2	\mathcal{Q}^3	\mathcal{Q}^4
$\ u - u_h\ _{\mathbf{L}^2}$	2.018572	3.011967	4.023695	2.014094	3.017163	4.010811	5.009527
$\ \tilde{u}_h - u_h\ _{\mathbf{L}^2}$	2.010670	3.013626	4.045771	1.907666	2.919804	3.983034	5.003389
$\ u - \tilde{u}_h\ _{\mathbf{L}^2}$	2.018052	3.113790	4.051598	2.010938	3.418867	4.211359	5.164469

Cavité entraînée 2D

On considère le problème classique d'écoulement de fluide confiné dans un domaine carré $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, soumis à la condition limite $u = 1$ sur la paroi supérieure, figure 3.14. On résout alors le problème (3.53) avec EF, à $Re = \frac{\rho u L}{\mu} = 1$. Comme le champ pression de pression dans la cavité n'est défini qu'à une constante près, la contrainte $\int_{\Omega} p \, d\Omega = 0$ permet

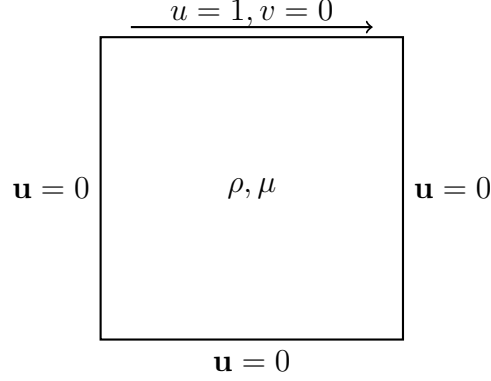


Figure 3.14 Conditions limites pour le problème de cavité entraînée

de fixer la valeur de la constante.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\
 \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} && \text{dans } \Omega \\
 \int_{\Omega} p \, d\Omega &= 0 && \\
 \mathbf{u} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_{haut} \\
 u &= 1 && \text{sur } \Gamma_{haut} \\
 v &= 0 && \text{sur } \Gamma_{haut}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Pour la résolution par éléments finis, on utilise des éléments de Taylor-Hood $(\mathcal{P}^k, \mathcal{P}^{k-1})$ avec $k = 2$ et $k = 3$, qui satisfont la condition *inf-sup*, et l'erreur est calculée sur la norme de la vitesse $\|\mathbf{u}\|$. L'écoulement présente deux singularités, dans les coins supérieurs gauche et droit, qui peuvent dégrader l'ordre de convergence de l'estimateur : en pratique, l'erreur est calculée partout dans le domaine, à l'exception d'une boule autour de ces singularités. Les courbes d'erreur sont tracées sur les figures 3.15 et 3.16, et les taux de convergence de l'estimateur sont donnés dans la table 3.2.

Tableau 3.2 Taux de convergence de l'estimateur d'erreur pour la cavité carrée

	$\mathcal{P}^2\text{-}\mathcal{P}^1$	$\mathcal{P}^2\text{-}\mathcal{P}^1$	$\mathcal{Q}^2\text{-}\mathcal{Q}^1$	$\mathcal{Q}^3\text{-}\mathcal{Q}^2$
$\ \tilde{u}_h - u_h\ _{\mathbf{L}^2}$	2.997344	3.960309	2.952337	3.896267

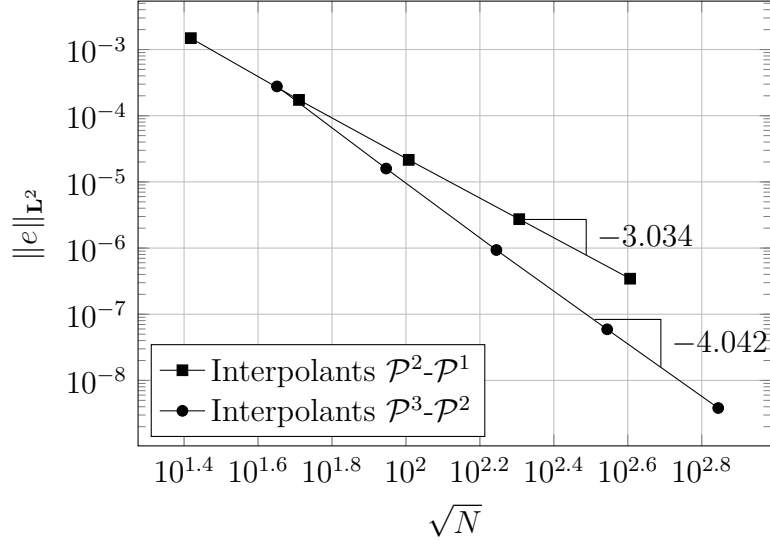


Figure 3.15 Erreur pour le problème de cavité carrée pour des interpolants $\mathcal{P}^2\text{-}\mathcal{P}^1$ et $\mathcal{P}^3\text{-}\mathcal{P}^2$

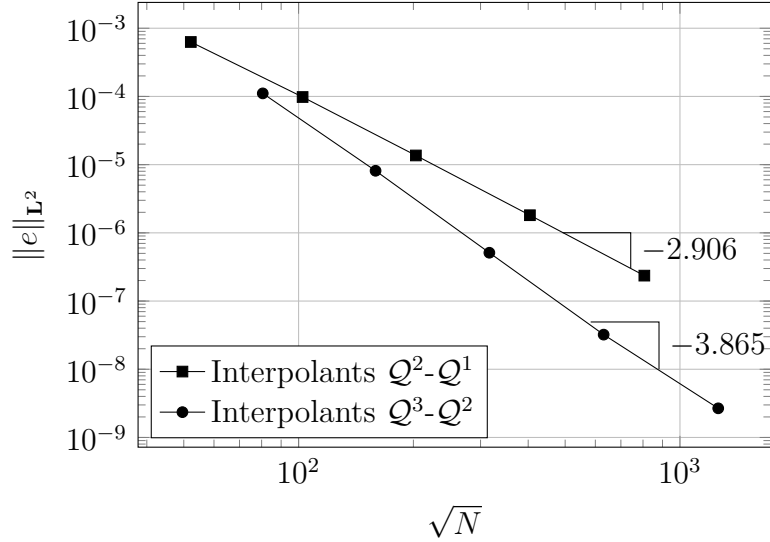


Figure 3.16 Erreur pour le problème de cavité carrée pour des interpolants $\mathcal{Q}^2\text{-}\mathcal{Q}^1$ et $\mathcal{Q}^3\text{-}\mathcal{Q}^2$

3.5 Méthodes de reconstruction des dérivées d'ordre élevé

Les algorithmes présentés à la section 3.2 permettent d'extraire, sous forme d'une métrique $\mathcal{Q}(\mathbf{a})$, les informations d'anisotropie contenues dans un polynôme homogène, censé représenter l'erreur dans le voisinage d'un sommet \mathbf{a} . On cherche ici à reconstruire ce polynôme $p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ caractérisant l'erreur locale. Pour relier ce polynôme avec le terme de reste du développement de Taylor de u , on utilise la notation sous forme de dérivée directionnelle,

équation (3.54) (Cao [17, 18]).

$$p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = D_{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}^{k+1} u(\mathbf{a}) = \left((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla \right)^{k+1} u(\mathbf{a}) \quad (3.54)$$

Les exemples 1 et 2 montrent le développement de (3.54) pour des interpolations \mathcal{P}^1 et \mathcal{P}^2 .

Exemple 1. Pour des interpolants linéaires, le reste de Taylor d'ordre 2 s'écrit comme la différentielle

$$d^{(2)}u(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\mathbf{a}} (x - x_a)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{\mathbf{a}} (x - x_a)(y - y_a) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\mathbf{a}} (y - y_a)^2,$$

d'une part. D'autre part, en écrivant le produit scalaire puis en élevant au carré, on a

$$\begin{aligned} \left((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla \right)^2 u(\mathbf{a}) &= \left((x - x_a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_a) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u(\mathbf{a}) \\ &= \left((x - x_a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x - x_a)(y - y_a) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y - y_a)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Exemple 2. Pour des éléments \mathcal{P}_2 , on a :

$$\begin{aligned} d^{(3)}u(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{\mathbf{a}} (x - x_a)^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\mathbf{a}} (x - x_a)^2 (y - y_a) \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\mathbf{a}} (x - x_a)(y - y_a)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{\mathbf{a}} (y - y_a)^3, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla \right)^3 u(\mathbf{a}) &= \left((x - x_a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_a) \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 u(\mathbf{a}) \\ &= \left((x - x_a)^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3(x - x_a)^2 (y - y_a) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ &\quad \left. + 3(x - x_a)(y - y_a)^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (y - y_a)^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) u(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

L'expression (3.54) représente bien un polynôme homogène de degré $k + 1$, avec pour coefficients les dérivées d'ordre $k + 1$ de la fonction inconnue. Il s'agit donc de reconstruire, en chaque sommet, les quantités $\partial^{k+1}u/\partial \mathbf{x}^{k+1}(\mathbf{a})$. Ce problème a été abordé à de nombreuses reprises dans le cas linéaire, et plusieurs méthodes de reconstruction de la matrice hessienne existent dans la littérature [54, 56]. On décrit brièvement les méthodes présentées par Vallet

et al. [54] :

- la méthode *double linear fitting* consiste à projeter la solution u_h dans l'espace des polynômes de degré 2 à l'aide d'un opérateur de lissage, puis à prendre le gradient de la fonction reconstruite \tilde{u}_h . La procédure est alors appliquée de nouveau à chaque polynôme constituant $G(\tilde{u}_h)$ pour extraire une approximation de la matrice hessienne :

$$H(u_h) = G(\tilde{G}(\tilde{u}_h))$$

- en inversant l'ordre des reconstructions et dérivations, on obtient la méthode de *simple linear fitting*, qui ne nécessite alors qu'une reconstruction dans le cas \mathcal{P}^1 . Cette méthode est donc moins coûteuse, mais ne converge pas vers la matrice hessienne exacte lorsque la taille du maillage décroît ;
- la méthode de *quadratic fitting* consiste simplement à reconstruire un polynôme de degré 2 par moindres carrés, qui est ensuite dérivé deux fois sur le patch ;
- enfin, la méthode *double L^2 -projection* considère l'interpolant de Clément comme opérateur de lissage, plutôt qu'une projection par moindres carrés. Cet opérateur reconstruit les dérivées dans le même espace polynomial que u_h à l'aide des projections Π_i^0 , définies sur chaque patch $\Omega_{\mathbf{z}_i}$ par :

$$\Pi_i^0 u_h \text{ est constant sur } \Omega_{\mathbf{z}_i} \text{ et } \int_{\Omega_{\mathbf{z}_i}} (\Pi_i^0(u_h) - u_h) = 0.$$

Un polynôme dans \mathcal{P}^1 est ensuite reconstruit avec la base polynômiale ϕ_i^1 . Pour la reconstruction de la hessienne, on applique une première fois ce lissage au gradient $G(u_h)$ pour obtenir les projections aux sommets :

$$\Pi_i^0(G(u_h)) = \frac{\sum_{K \in \Omega_{\mathbf{z}_i}} |K| G(u_h)|_K}{\sum_{K \in \Omega_{\mathbf{z}_i}} |K|}$$

Puisque le gradient est constant par morceaux mais non défini aux sommets, ce n'est rien d'autre qu'une moyenne des valeurs sur le patch, pondérées par le volume des éléments. La hessienne est obtenue en appliquant de nouveau ce processus au gradient reconstruit. Cette procédure est également présentée dans Mbinkya [22], où elle est utilisée pour approximer les dérivées troisième :

$$D^{(3)}(u_h) = \frac{\sum_{K \in \Omega_{\mathbf{z}_i}} |K| \nabla(H(u_h))|_K}{\sum_{K \in \Omega_{\mathbf{z}_i}} |K|}$$

Bien que la méthode de *quadratic fitting* soit recommandée dans l'article de Vallet et al., les résultats obtenus pour des degrés plus élevés ne sont pas satisfaisants. Ce commentaire est également fait par Loseille, qui déconseille son utilisation pour des applications en CFD. Dans Coulaud & Loseille [21], la méthode de *double L^2 -projection* est généralisée aux dérivées d'ordre $k + 1$. L'évaluation des dérivées aux sommets nécessite toutefois le calcul des dérivées d'ordre $k + 1$ des fonctions d'interpolations, qui ne sont pas systématiquement disponibles dans le programme EF. Cette contrainte technique nous a poussé à choisir la méthode de *double linear fitting*, qui est généralisée pour un degré arbitraire.

Généralisation de la méthode *double linear fitting*

La méthode présentée dans [54] dans le cas linéaire consiste à appliquer une première fois un opérateur de lissage, puis à extraire le gradient de la fonction obtenue. Typiquement, un tel opérateur est une projection par moindres carrés sur l'espace des polynômes de degré deux. Le gradient obtenu est donc un couple de polynômes de degré un, équation (3.55). On reprend la notation de Vallet où $\tilde{\cdot}$ indique l'opérateur de lissage.

$$G(\tilde{u}_h) \in \mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^1 \quad (3.55)$$

La procédure est alors appliquée une seconde fois à $G(\tilde{u}_h)$ pour extraire la hessienne, équation (3.56).

$$G(\tilde{G}(\tilde{u}_h)) \in \mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^1 \quad (3.56)$$

On évalue le terme hors diagonale par une moyenne des deux termes obtenus, *c-à-d* :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{G_y(\tilde{G}_x(\tilde{u}_h)) + G_x(\tilde{G}_y(\tilde{u}_h))}{2}$$

Ainsi, on suppose que la partie anti-symétrique de la hessienne reconstruite est négligeable et que cette construction converge vers la matrice exacte symétrique, voir Zhang & Guo [56]. La généralisation de cette méthode aux dérivées d'ordre plus élevé est immédiate : à partir de la solution discrète initiale $u_h^{(k)}$, on applique successivement l'opérateur de lissage sur la boule topologique du sommet, suivi de l'opérateur gradient, jusqu'à reconstruire les dérivées désirées. On note toutefois le nombre croissant de polynômes à conserver en chaque sommet, comme le montre l'arborescence (3.57), qui explicite la méthode jusqu'à la récupération de

la hessienne. Pour chaque polynôme, le degré est explicitement indiqué en exposant.

$$\begin{array}{ccccccc}
u_h^{(k)} & \rightarrow & \tilde{u}_h^{(k+1)} & \rightarrow & G_x^{(k)} \tilde{u}_h & \rightarrow & \tilde{G}_x^{(k+1)} \tilde{u}_h \rightarrow G_x^{(k)}(\tilde{G}_x \tilde{u}_h) \\
& & & & G_y^{(k)} \tilde{u}_h & & G_y^{(k)}(\tilde{G}_x \tilde{u}_h) \\
& & & \searrow & & & \\
& & & & \tilde{G}_y^{(k+1)} \tilde{u}_h & \rightarrow & G_x^{(k)}(\tilde{G}_y \tilde{u}_h) \\
& & & & & & G_y^{(k)}(\tilde{G}_y \tilde{u}_h)
\end{array} \tag{3.57}$$

En notant par G_{xxy} , par exemple, les dérivées ainsi reconstruites, on obtient finalement l'expression des coefficients de p_{k+1} :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1}} &= G_{xx\dots} \\
\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^k \partial y} &= \frac{G_{yx\dots} + \dots + G_{x\dots xyx\dots x} + \dots + G_{x\dots xy}}{C_k^2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x \partial y^k} &= \frac{G_{xy\dots} + \dots + G_{y\dots yxy\dots y} + \dots + G_{y\dots yx}}{C_k^2} \\
\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}} &= G_{yy\dots},
\end{aligned}$$

où la notation C_k^n désigne le coefficient binomial. Bien que la notation dans le cas général soit délicate, l'exemple 3 explicite les coefficients pour des dérivées d'ordre 4.

Exemple 3. Pour $k + 1 = 4$, les coefficients binomiaux C_4^n sont 1, 4, 6, 4, 1. Les dérivées mixtes sont obtenues en moyennant les contributions de chacune des reconstructions, soit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= G_{xxxx} \\
\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} &= \frac{G_{yxxx} + G_{xyxx} + G_{xxyx} + G_{xxxy}}{4} \\
\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{G_{xxyy} + G_{xyyy} + G_{yyxx} + G_{xyxy} + G_{yxyx} + G_{yyxy}}{6} \\
\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} &= \frac{G_{xyyy} + G_{yxyy} + G_{yyxy} + G_{yyyy}}{4} \\
\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} &= G_{yyyy}
\end{aligned}$$

3.6 Mise en œuvre et algorithme final

À partir du maillage \mathcal{T}_h et de la solution discrète u_h uniquement, le problème considéré tout au long de ce travail est de déterminer un champ de métriques reflétant les caractéristiques anisotropes de la solution : le maillage adapté est alors constitué d'éléments étirés, alignés avec les directions principales d'erreur. Les sections précédentes fournissent différentes techniques d'approximation, de l'estimation de l'erreur d'interpolation à sa majoration par une forme quadratique, qui sont ici compilées pour former la procédure complète de post-traitement. Pour chaque variable à traiter, celle-ci est découpée dans EF en trois étapes :

1. Reconstruction de la solution \tilde{u}_h et des dérivées $\nabla^{k+1}(\tilde{u}_h)$. Ces dérivées, ainsi que les moyennes des dérivées mixtes, évaluées en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, définissent les coefficients du polynôme d'erreur $p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$. La solution reconstruite \tilde{u}_h est conservée dans le but d'estimer l'erreur.
2. Majoration de $p_{k+1}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ par une forme quadratique associée à une métrique \mathcal{Q} , au moyen de la méthode algébrique (en 2D) ou de la méthode log-simplexe (en 3D).
3. Métrique optimale \mathcal{M}_{opt} par mise à l'échelle de \mathcal{Q} , selon la complexité visée.

La procédure de post-traitement est détaillée dans le cas d'éléments \mathcal{P}^2 à l'algorithme 4. Le processus d'adaptation peut alors être défini comme une série de n cycles, algorithme 3.

Algorithme 3 : Cycles d'adaptation
Maillage initial \mathcal{T}_1 for $i \leftarrow 1$ to n_{max} do Calculer la solution u_h sur \mathcal{T}_i Calculer le champ de métriques $\mathbf{M}_{opt} = (\mathcal{M}_{opt}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ sur \mathcal{T}_i Générer le maillage adapté \mathcal{T}_{i+1} end

En pratique, $n_{max} = 5$ à 10 cycles sont suffisants pour converger vers le maillage final. On observe que le nombre de sommets résultant, proche de la complexité prescrite, est généralement atteint après deux à trois itérations : les cycles subséquents permettent aux nœuds de se répartir afin de minimiser l'erreur dans la norme choisie. Certains travaux [1, 4] suggèrent de mener l'adaptation en deux étapes : une première série de cycles d'adaptation avec une complexité cible N_1 permet de déterminer les directions principales ; une deuxième série avec $N_2 > N_1$ augmente uniquement la densité de nœuds (la finesse) en conservant les directions d'anisotropie.

Algorithme 4 : Métrique optimale \mathcal{M}_{opt} en chaque sommet \mathbf{x}_i pour des éléments \mathcal{P}^2

Input : Maillage \mathcal{T}_h , solution u_h , complexité cible N , norme \mathbf{L}^p à minimiser

Output : Champ de métriques optimal pour $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = N : \mathbf{M} = (\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$

for $i \leftarrow 1$ **to** $nSommets$ **do**

% Reconstruction de la solution \tilde{u}_h
 $\tilde{u}_h \leftarrow R_h u_h$

% Reconstruction du tenseur symétrique des dérivées d'ordre trois $\nabla^3(\tilde{u}_h)$
 $G_x(\tilde{u}_h), G_y(\tilde{u}_h) \leftarrow \nabla \tilde{u}_h$

$G_{xx}(\tilde{u}_h), G_{xy}(\tilde{u}_h) \leftarrow \nabla \tilde{G}_x$
 $G_{yx}(\tilde{u}_h), G_{yy}(\tilde{u}_h) \leftarrow \nabla \tilde{G}_y$

$G_{xxx}(\tilde{u}_h), G_{xxy}(\tilde{u}_h) \leftarrow \nabla \tilde{G}_{xx}$
 $G_{xyx}(\tilde{u}_h), G_{xyy}(\tilde{u}_h) \leftarrow \nabla \tilde{G}_{xy}$
 $G_{yxx}(\tilde{u}_h), G_{yxy}(\tilde{u}_h) \leftarrow \nabla \tilde{G}_{yx}$
 $G_{yyx}(\tilde{u}_h), G_{yyy}(\tilde{u}_h) \leftarrow \nabla \tilde{G}_{yy}$

$a_i \leftarrow G_{xxx}(0, 0)$

$b_i \leftarrow \frac{G_{xxy}(0, 0) + G_{xyx}(0, 0) + G_{yyx}(0, 0)}{3}$

$c_i \leftarrow \frac{G_{xyy}(0, 0) + G_{yxy}(0, 0) + G_{yyy}(0, 0)}{3}$

$d_i \leftarrow G_{yyy}(0, 0)$

% Polynôme d'erreur local
 $e_i(x, y) = a_i x^3 + 3b_i x^2 y + 3c_i x y^2 + d_i y^3$

% Métrique \mathcal{Q} : meilleure borne supérieure pour $e(x, y)$
 $\mathcal{Q}(\mathbf{x}_i) \leftarrow \text{metric}(n_\theta, e_i(x, y), \epsilon, \epsilon_0)$ ou $\text{metric}(n_\theta, e_i(x, y), n_{max}, tol)$

% Métrique optimale \mathcal{M}_{opt} : mise à l'échelle de \mathcal{Q}
 $\mathcal{M}_{opt}(\mathbf{x}_i) \leftarrow N^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} (\det \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i))^{\frac{p(k+1)}{2(p(k+1)+n)}} \right)^{-\frac{2}{n}} (\det \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i))^{\frac{-1}{p(k+1)+n}} \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)$

end

CHAPITRE 4 APPLICATIONS NUMÉRIQUES

Ce dernier chapitre présente l'application de la procédure de remaillage à plusieurs cas simples. Les deux premiers exemples montrent l'adaptation sur des fonctions analytiques, pour lesquelles on peut facilement accentuer le caractère anisotrope en jouant sur les exposants des variables ou à l'aide d'un paramètre. On s'intéresse principalement au respect du nombre de sommets demandés, et on compare l'ordre de convergence observé à l'ordre théorique. Le deuxième exemple montre l'influence du choix de la norme \mathbf{L}^p sur le niveau de détail capturé par le maillage final. Les deux cas suivants sont des écoulements simples : le problème de cavité entraînée présenté précédemment, et l'écoulement sur une marche descendante. Pour chacun, l'adaptation est menée sur base des champs de vitesses u et v uniquement, ainsi que l'intersection des métriques associées $\mathcal{M}_{u \cap v}$. La pression n'intervient pas dans le processus. Enfin, un exemple tridimensionnel montre l'application de la méthode log-simplexe pour l'adaptation de tétraèdres \mathcal{P}^2 .

4.1 Maillage anisotrope d'éléments \mathcal{P}^2

Ce premier exemple montre les résultats de l'adaptation anisotrope sur des éléments \mathcal{P}^2 . Il permet de valider l'implémentation des différentes étapes de la construction des métriques, depuis la reconstruction de la solution et de ses dérivées, jusqu'au calcul du champ de métriques optimal \mathbf{M}_{opt} pour une complexité fixée. De manière quantitative, on s'intéresse principalement au nombre final de sommets, que l'on compare avec la complexité imposée, et à l'ordre de convergence en maillages, que l'on compare avec l'ordre théorique de la proposition 7. Comme pour la vérification de l'estimateur d'erreur, on choisit d'adapter sur la solution d'un problème de diffusion, donnée par le champ bidimensionnel $f_1(x, y) = x^4 y^4$ défini sur $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Le problème à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta u = 12 x^2 y^2 (x^2 + y^2) & \text{dans } \Omega \\ u(x, y) = 1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

La surface et les isocontours du champ f_1 sont représentés sur la figure 4.1. Pour l'adaptation, une complexité croissante de $N = 2000$ à $N = 16000$ est imposée pour le maillage continu, et on choisit de minimiser l'erreur d'interpolation en norme \mathbf{L}^2 : les maillages finaux obtenus sont illustrés sur la figure 4.2. Le nombre final de sommets est supérieur à la complexité requise, mais on observe que le ratio N_{final}/N tend vers 1 lorsque N augmente, table 4.1.



Figure 4.1 Surface et isocontours de $f_1(x, y)$

Plusieurs facteurs influencent le nombre de sommet du maillage final :

- à l'intérieur d'un même cycle d'adaptation, le générateur de maillages procède par itérations et **interpole la métrique** prescrite aux sommets, aux nœuds nouvellement insérés. Pour une fonction régulière comme x^4y^4 , cette interpolation agit directement sur le nombre final de sommets du maillage unité généré.
- le générateur de maillage impose une **gradation** entre les longueurs de deux arêtes adjacentes. Typiquement, ce facteur h est contrôlé dans MMG2D par le paramètre `-hgrad` et limite le ratio l_1/l_2 :

$$\frac{1}{h} \leq \frac{l_1}{l_2} \leq h.$$

Dans le cas de champs avec des gradients importants, cette gradation est nécessaire pour maintenir le champ de métriques dans C^∞ .

- des **tailles minimales et maximales** sont imposées lors du calcul des métriques par minoration/majoration des valeurs propres de \mathcal{M}_{opt} :

$$\lambda_{i,opt} = \min \left(\max \left(|\lambda_{i,opt}|, \frac{1}{h_{max}^2} \right), \frac{1}{h_{min}^2} \right)$$

Comme la métrique optimale est ajustée pour une complexité N , la modification de ses valeurs propres influe également sur le nombre de sommets du maillage unité.

Ces observations sont également faites par Bélanger [4] et Loseille [1] pour des éléments linéaires. Les taux de convergence obtenus sont en accord avec le taux théorique $\propto N^{-\frac{k+1}{2}}$, figure 4.3.

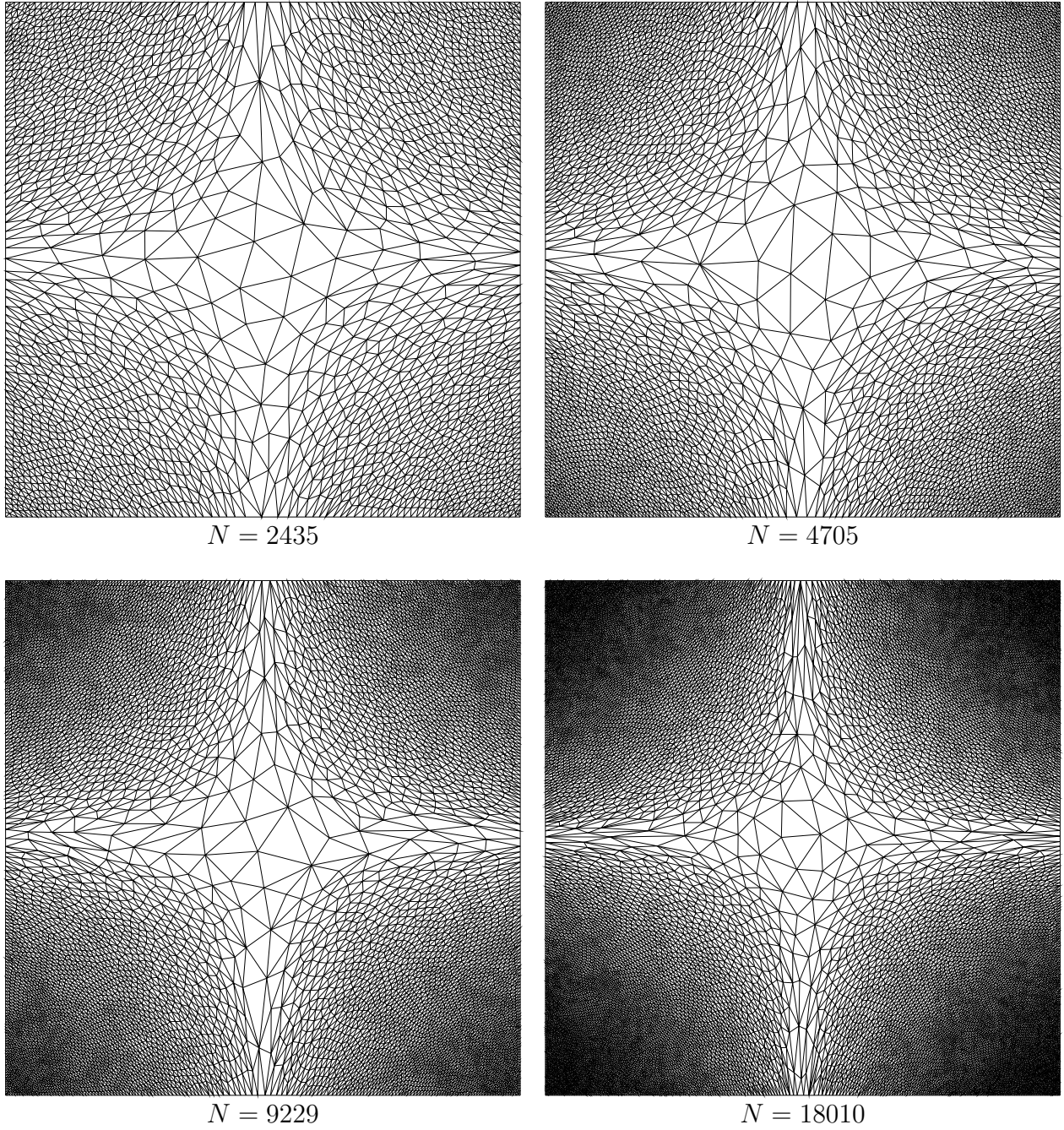
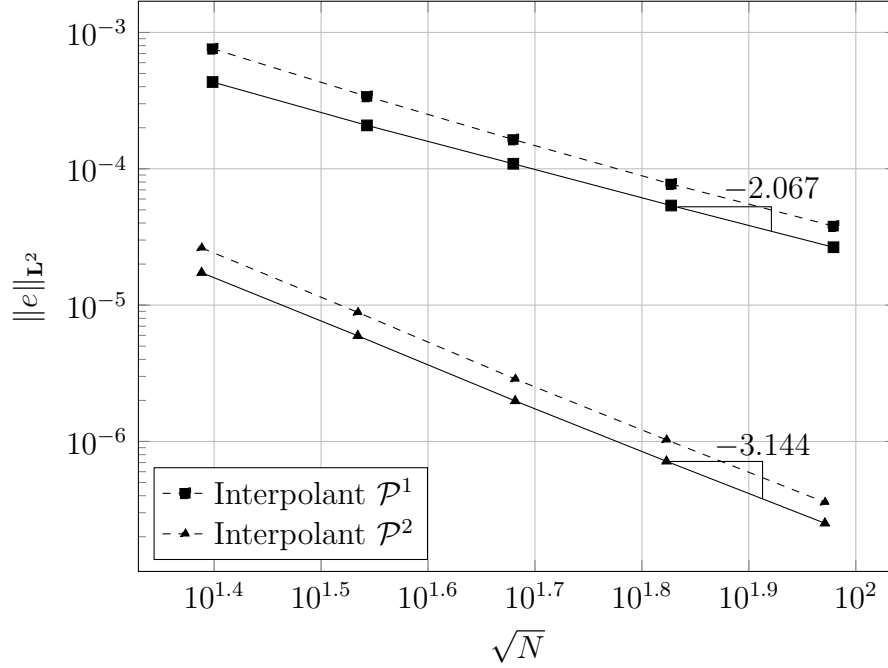


Figure 4.2 Maillages finaux $\mathcal{T}_{h,N}$ à $\mathcal{T}_{h,8N}$ d'éléments \mathcal{P}^2 pour la fonction $f_1(x, y)$, minimisant la norme \mathbf{L}^2 de l'erreur d'interpolation. De haut en bas et de gauche à droite : complexité du maillage continu $N = 2000, 4000, 8000, 16000$.

Tableau 4.1 Nombre de sommets pour les maillages $\mathcal{T}_{h,N}$ à $\mathcal{T}_{h,8N}$

	N	N_{final}	N_{final}/N
$\mathcal{T}_{h,N}$	2000	2435	1.2175
$\mathcal{T}_{h,2N}$	4000	4705	1.1763
$\mathcal{T}_{h,4N}$	8000	9229	1.1536
$\mathcal{T}_{h,8N}$	16000	18010	1.1256

Figure 4.3 Erreur en norme L^2 pour la fonction $f_1(x, y)$ pour des maillages de triangles de Lagrange \mathcal{P}^1 et \mathcal{P}^2

4.2 Influence de la norme L^p sur le processus d'adaptation

Le deuxième exemple est la fonction f_2 définie par

$$f_2(x, y) = 0.05 \sin(50x) + \frac{1 + \tanh\left(\alpha\left(x - \frac{\sin(2\pi y)}{4}\right)\right)}{2}$$

Cette fonction représente l'approximation continue d'une fonction échelon de Heaviside, où le paramètre α détermine l'épaisseur de la zone de transition. Elle présente une région de gradients élevés, qui serpente en travers du domaine. La composante $0.05 \sin(50x)$ dans f_2 oscille à haute fréquence, mais à faible amplitude. Cette fonction est utilisée pour montrer l'effet attractif qu'a une région de gradients importants sur la disposition des nœuds du maillage adapté, figure 4.6. En effet, la métrique calculée en minimisant la norme L^∞ de l'erreur tente de minimiser la valeur maximale atteinte par l'erreur : le niveau d'erreur est uniquement

contrôlé par les points situés sur les gradients. La quasi-totalité des nœuds disponibles est donc concentrée autour de la singularité et la métrique ne “voit” pas les oscillations de faible amplitude. À l’inverse, les normes \mathbf{L}^1 et \mathbf{L}^2 sont beaucoup plus rigides : un contrôle dans la norme \mathbf{L}^1 revient à limiter l’intégrale de $|e|$, limitant l’erreur d’interpolation sur le domaine au complet. Lorsque $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ est calculé avec ce choix de normes, les oscillations de faible amplitude sont capturées dans le maillage final.

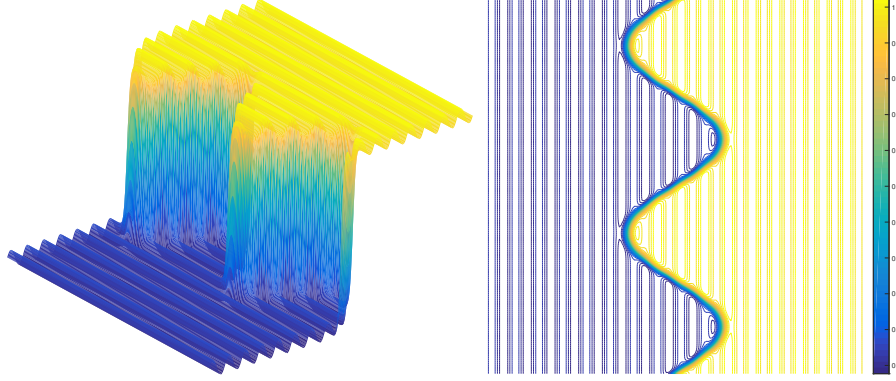


Figure 4.4 Surface et isocontours de $f_2(x, y)$

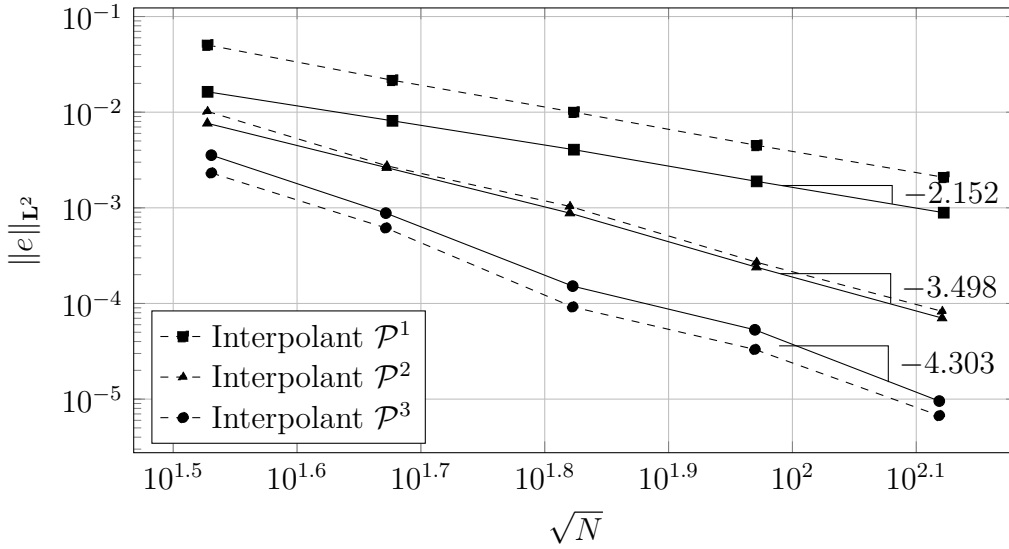


Figure 4.5 Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la fonction $f_2(x, y)$ pour des maillages de triangles de Lagrange \mathcal{P}^1 à \mathcal{P}^3

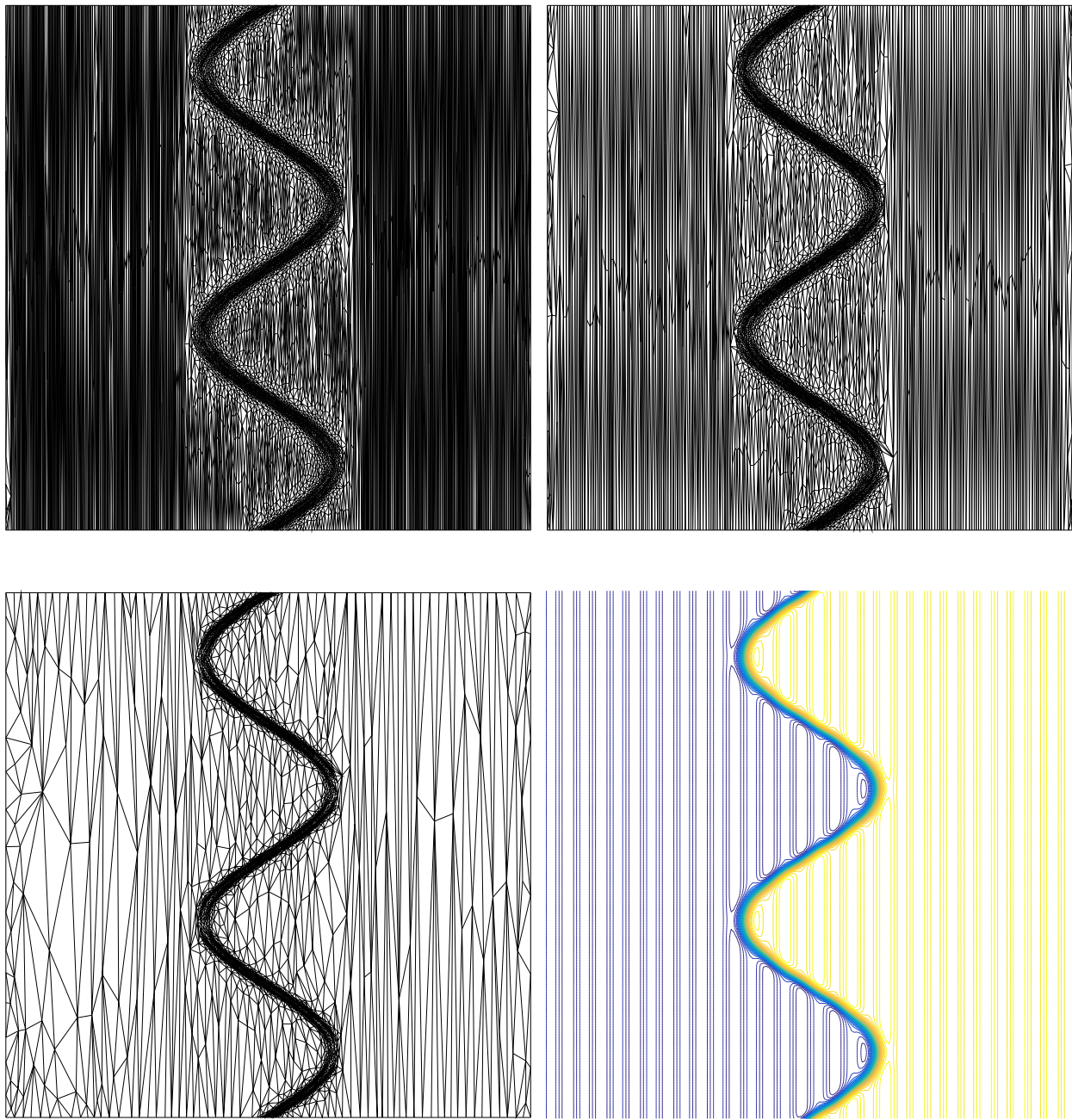


Figure 4.6 Maillages finaux d'éléments \mathcal{P}^2 pour la fonction $f_2(x,y)$. En haut à gauche : maillage minimisant la norme \mathbf{L}^1 de l'erreur d'interpolation. En haut à droite : norme \mathbf{L}^2 , et en bas à gauche : \mathbf{L}^∞ . Chaque maillage a une complexité cible de $N = 5000$. Les isovaleurs de f_2 dans $[-1,1] \times [-1,1]$ sont de nouveau représentées en bas à droite.

4.3 Cavité carrée entraînée

Le problème d'écoulement de fluide confiné dans une cavité carrée permet de montrer les maillages adaptés à partir de la métrique intersection, dans un écoulement présentant des singularités. On reprend la même configuration que présentée précédemment, figure 4.7. Le nombre de Reynolds est fixé à 1000, avec la viscosité adaptée en conséquence. Pour cette valeur, deux zones de recirculation apparaissent clairement dans les coins inférieurs de la cavité, comme l'indiquent les lignes de courant figure 4.7.   partir d'un maillage grossier d'éléments \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 , on applique la procédure de remaillage en reconstruisant les dérivées des champs u et v . L'adaptation avec les métriques résultantes, \mathcal{M}_u et \mathcal{M}_v , est illustrée sur la figure 4.8, pour une complexité cible $N = 10000$ dans chacun des cas et en minimisant la norme \mathbf{L}^2 de l'erreur. Les maillages obtenus suivent les gradients des champs de vitesse, mais concentrent néanmoins beaucoup de sommets autour des singularités des coins supérieurs. On constate que le nombre final de sommets est proche de la consigne. On considère ensuite

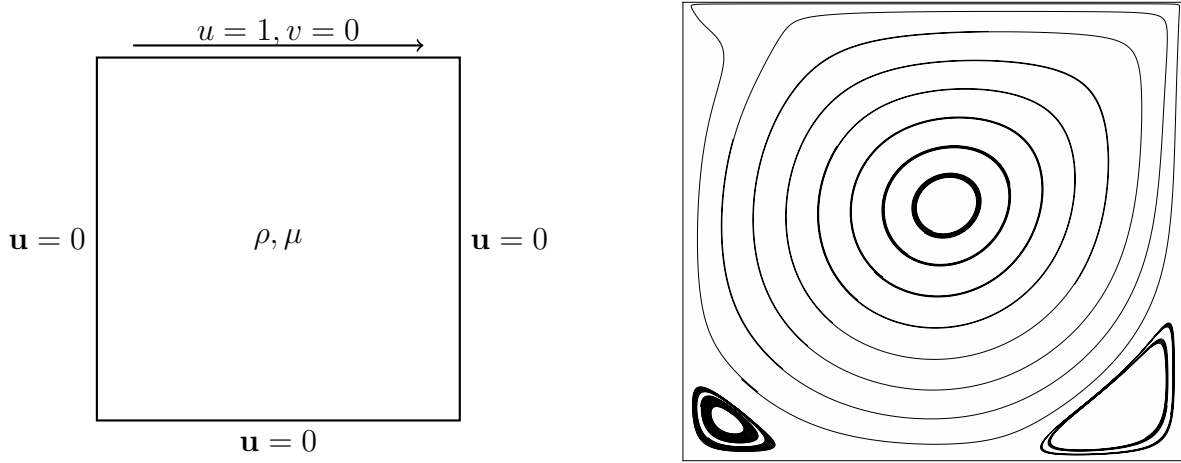


Figure 4.7 Conditions limites et lignes de courant pour le problème de cavité entraînée

l'adaptation selon la métrique intersection $\mathcal{M}_{u \cap v}$. Comme attendu, les maillages résultants conservent les caractéristiques principales de chacune des composantes, figure 4.9. Les zones de gradients importants se trouvant aux frontières haut-bas pour u , et gauche-droite pour v , les maillages issus de $\mathcal{M}_{u \cap v}$ conservent les configurations les plus critiques et présentent des zones raffinées près des quatre frontières du domaine. Pour l'intersection, le nombre final de sommets est nettement supérieur à la complexité imposée : la contrainte est en effet appliquée indépendamment aux métriques \mathcal{M}_u et \mathcal{M}_v , et la métrique intersection n'est pas remise à l'échelle pour satisfaire $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{u \cap v}) = N$. En comparant le meilleur et pire cas possible, on

obtient la borne peu contraignante [4] :

$$\max(N_u, N_v) \leq N_{u \cap v} \leq N_u + N_v$$

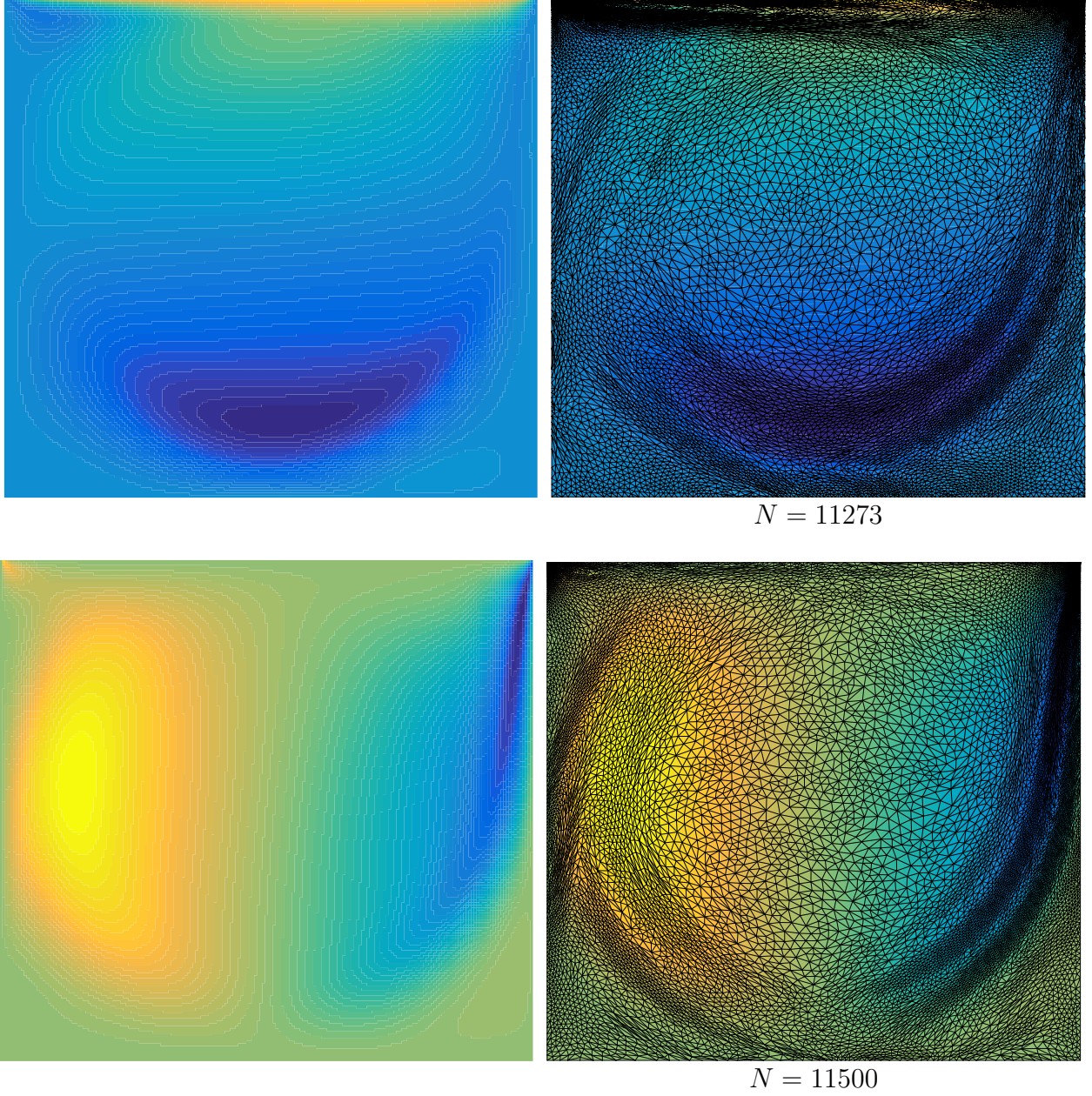


Figure 4.8 Maillages finaux d'éléments \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 pour la cavité entraînée adapté à partir de \mathcal{M}_u et \mathcal{M}_v . En haut : champ de vitesse horizontale u dans la cavité et maillage obtenu pour $N = 10000$. En bas : champ de vitesse verticale v et maillage associé. On observe deux zones où le ratio d'anisotropie augmente dans les coins inférieurs, signe possible de l'adaptation sur les zones de recirculation.

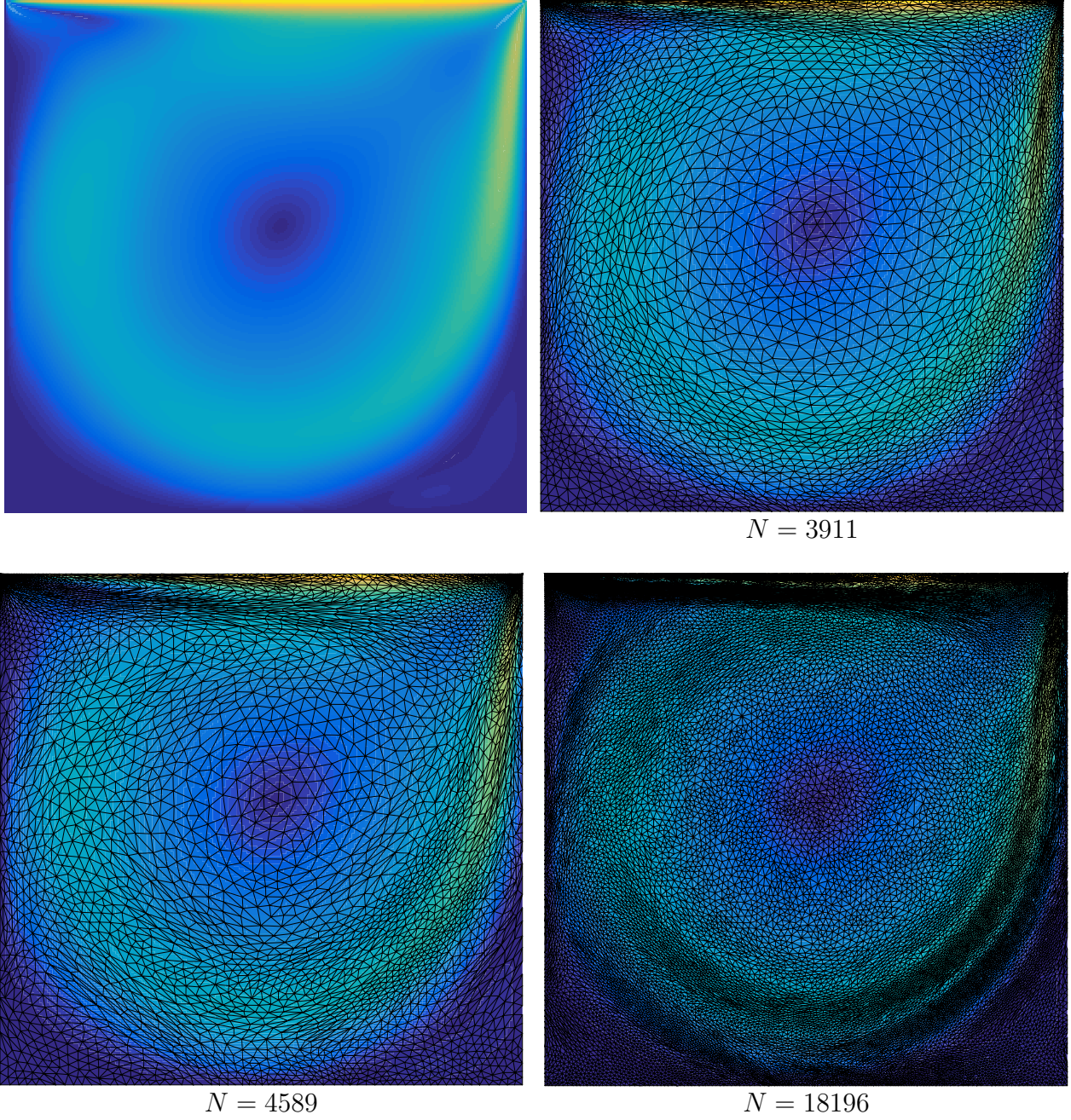


Figure 4.9 Maillages finaux d'éléments \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 pour la cavité entraînée adaptés à partir de $\mathcal{M}_{u \cap v}$. La complexité cible est $N = 2000$ (en haut à droite), $N = 4000$ (en bas à gauche) et $N = 16000$ (en bas à droite). En haut à gauche : norme du vecteur vitesse $\|\mathbf{u}\|$ comprise entre 0 et 1.

L'ordre de convergence en métrique est finalement illustré sur la figure 4.10. L'erreur est calculée sur la norme du vecteur vitesse :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} = \left(\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|v\|_{\mathbf{L}^2}^2}$$

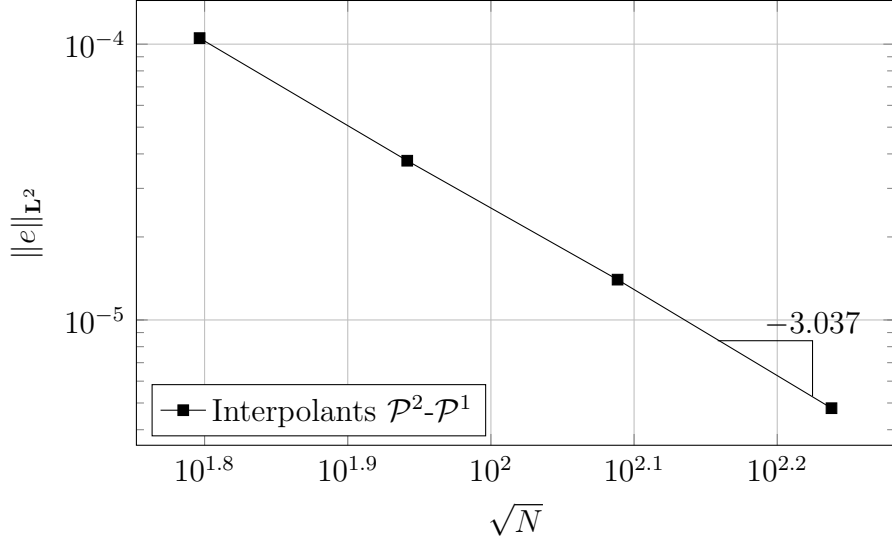


Figure 4.10 Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la cavité entraînée pour des maillages \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1

4.4 Marche descendante

On considère le problème de la marche descendante, soit l'écoulement d'un fluide en canal débouchant sur un élargissement soudain. La géométrie utilisée est illustrée sur la figure 4.11 avec des conditions de non glissement sur les parois inférieures et supérieures. À l'entrée,

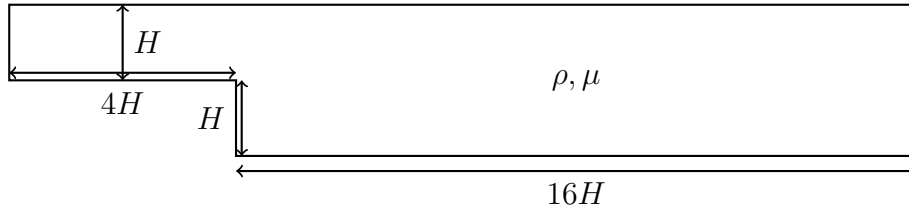


Figure 4.11 Géométrie de la marche descendante

l'écoulement est supposé pleinement développé et un profil parabolique de Poiseuille est imposé pour u , avec $v_{in} = 0$. Pour la sortie, on applique la condition de traction nulle $-p + \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, et $v_{out} = 0$. On considère un écoulement laminaire à $Re = \frac{\rho U_{max} H}{\mu} = 350$. Afin de limiter l'influence de la singularité causée par l'angle droit, un congé a été ajouté

à la géométrie pour une transition plus douce. Les lignes de courant sont illustrées sur la figure 4.12 : l'écoulement est caractérisé par une zone de recirculation directement en aval de la marche.

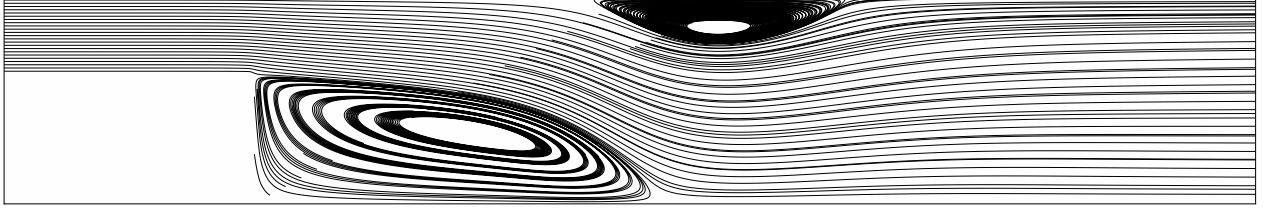
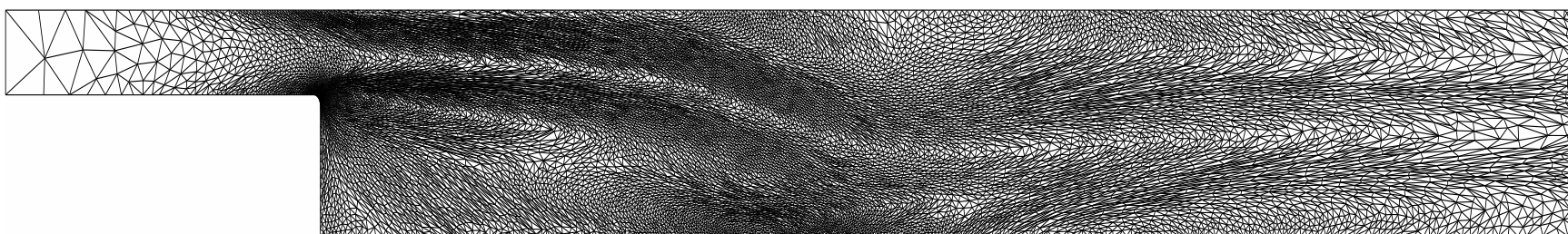
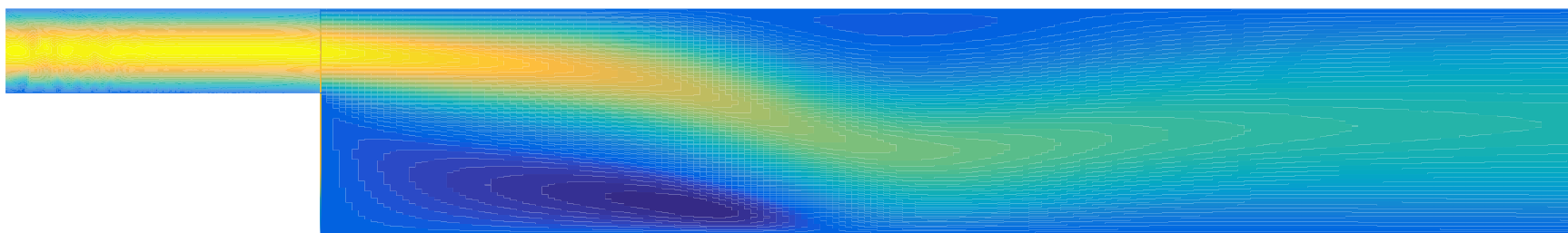


Figure 4.12 Ligne de courant pour la marche descendante

On choisit toujours de minimiser la norme \mathbf{L}^2 de l'erreur, pour capturer différentes échelles de l'écoulement. Comme pour la cavité, on présente d'abord les maillages adaptés pour les champs de vitesse u et v aux figures 4.13 et 4.14, pour lesquels la complexité cible est $N = 10000$. Pour la vitesse horizontale, on observe que les éléments s'alignent vers les directions des gradients et capturent une partie de la poche de recirculation au niveau de la zone cisailée sur la paroi inférieure. L'écoulement en entrée étant simplement une fonction quadratique $u(y)$, un seul élément \mathcal{P}^2 suffit à capturer parfaitement le profil de vitesse. En aval, la superposition du champ de vitesse et du maillage montre une concentration d'éléments de part et d'autre du centre du canal, où les gradients sont plus forts. L'alignement des éléments est moins évident pour le champ de vitesse verticale, où les gradients sont globalement moins marqués. On observe toutefois une grande densité d'éléments directement en aval de la marche et au niveau de la zone cisailée. Malgré le congé et l'utilisation d'une norme pénalisant les singularités, l'angle de la marche attire une fraction considérable des ressources disponibles pour l'adaptation. L'influence de la condition limite de sortie $v = 0$ est clairement visible sur la figure 4.14, où un raccordement brusque est nécessaire pour respecter la condition imposée. La fin du canal est donc sujette à une erreur importante, et attire également un grand nombre de sommets. De nouveau, les maillages adaptés à partir de la métrique intersection $\mathcal{M}_{u \cap v}$ présentent les caractéristiques les plus critiques de chaque champ de vitesse. En particulier, l'écoulement développé en entrée est toujours capturé par un unique élément, les zones de gradients importants – directement en aval de la marche, ainsi que la zone cisailée – sont adaptés en conséquence et la contribution de \mathcal{M}_v concentre un grand nombre de sommets à la sortie. La convergence en maillage est finalement illustrée sur la figure 4.17, où le calcul d'erreur exclut de nouveau les contributions des éléments situés sur la singularité.



$N = 11387$

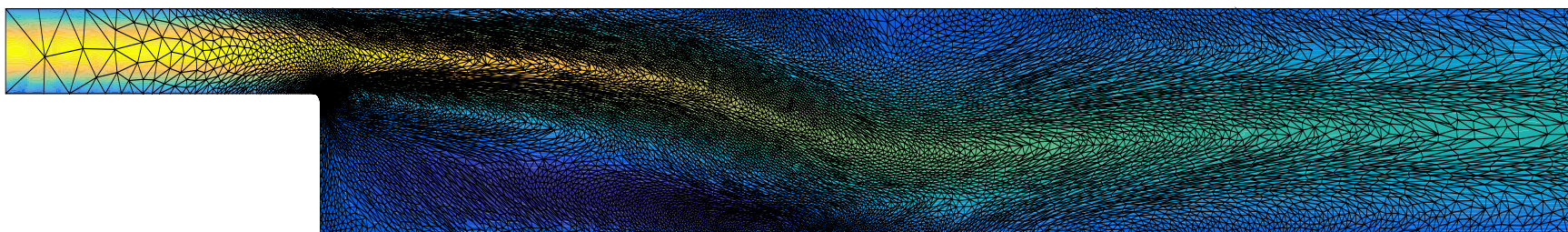
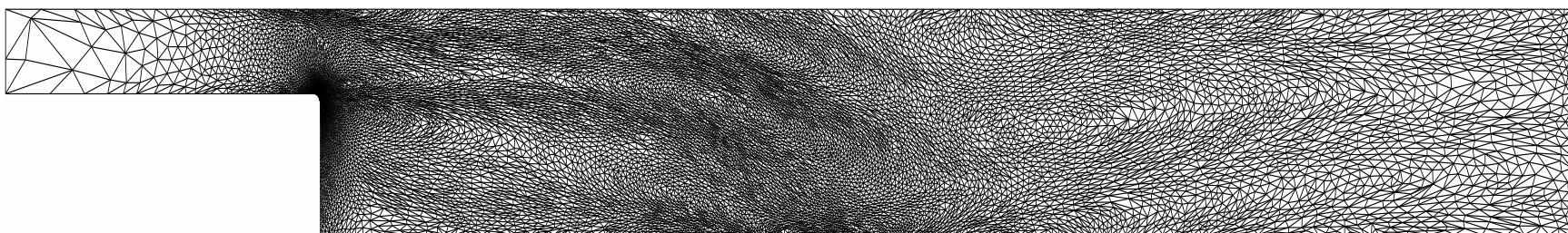
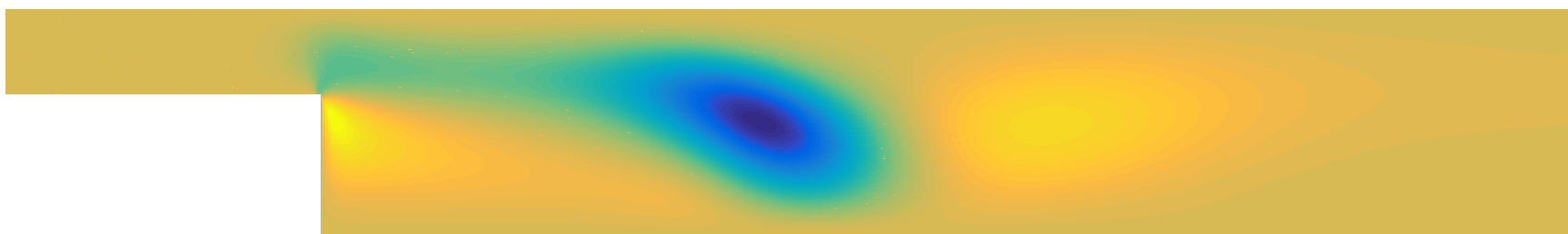


Figure 4.13 Champ de vitesse horizontale et maillage \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 adapté à partir de \mathcal{M}_u . Complexité cible $N = 10000$.



$N = 11477$

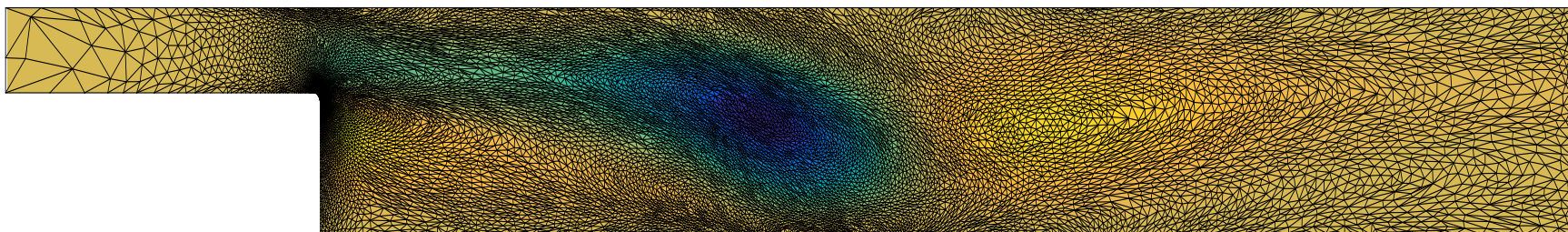
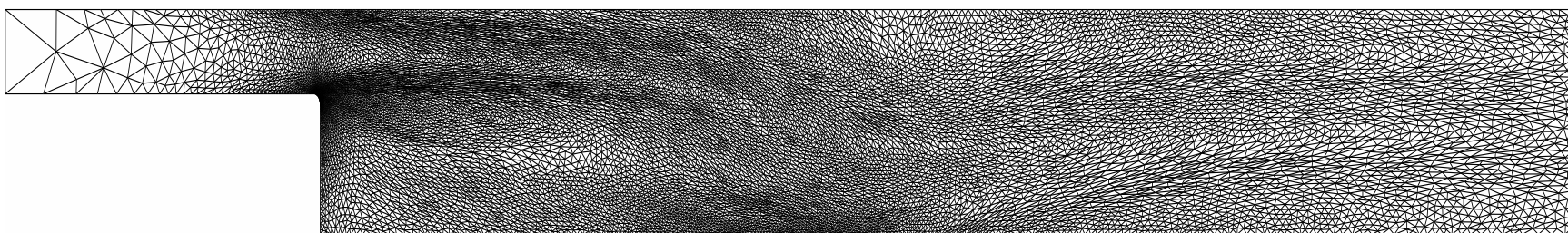
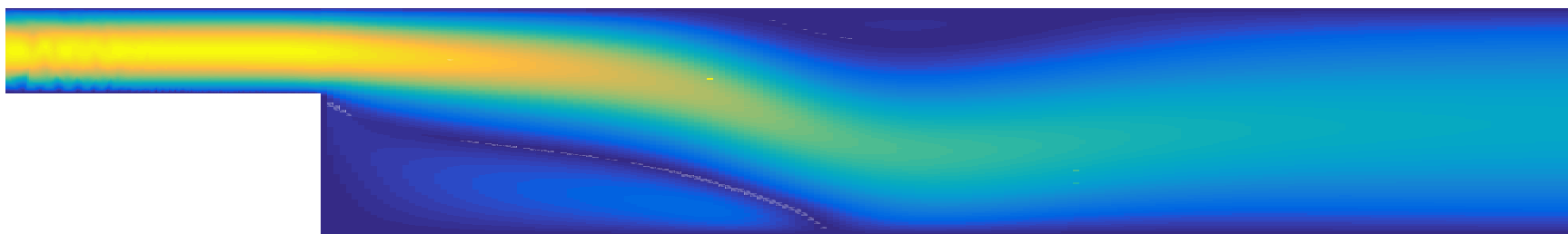


Figure 4.14 Champ de vitesse verticale et maillage \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 adapté à partir de \mathcal{M}_v . Complexité cible $N = 10000$.



$N = 11920$

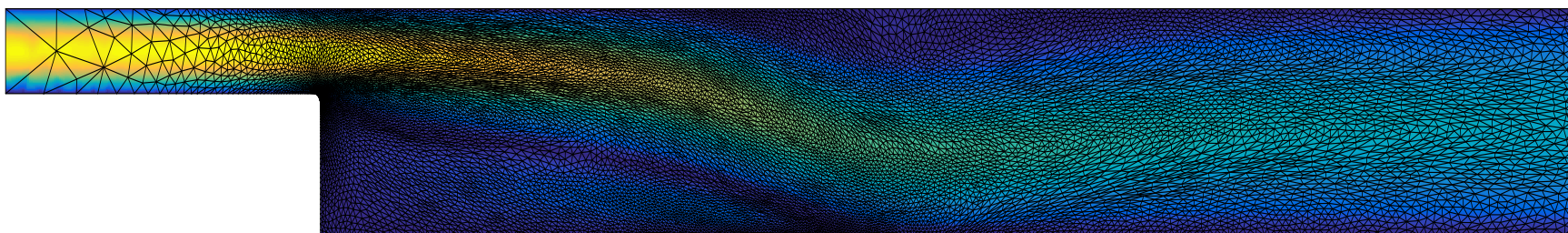
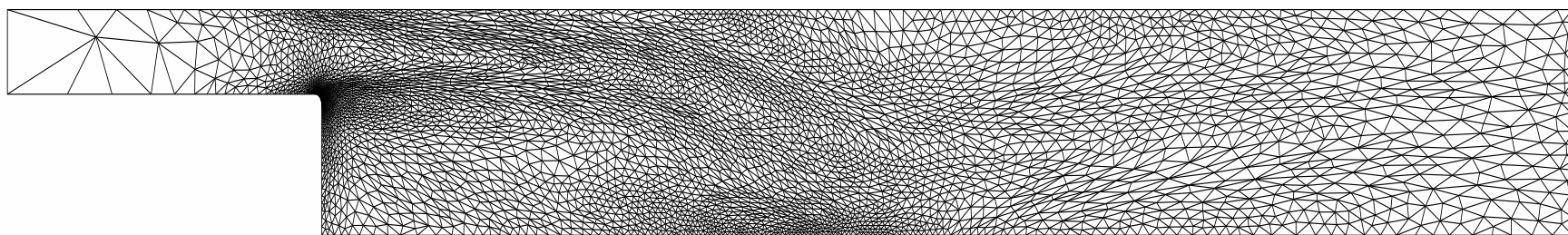
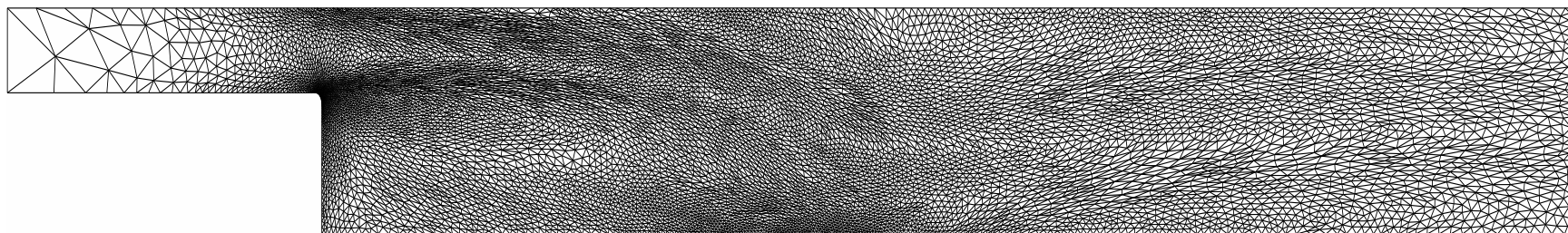


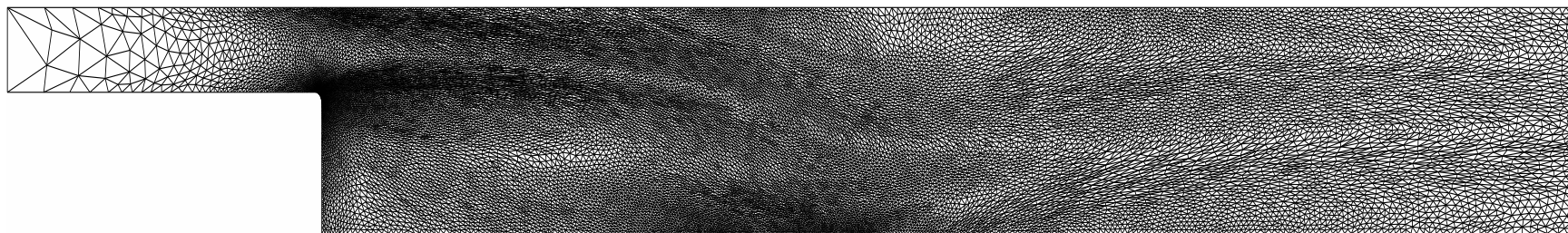
Figure 4.15 Norme du vecteur vitesse $\|\mathbf{u}\|$ et maillage \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 adapté à partir de l'intersection $\mathcal{M}_{u \cap v}$. Complexité cible $N = 5000$.



$N = 4481$



$N = 9589$



$N = 18775$

Figure 4.16 Maillages finaux $\mathcal{T}_{h,N}$ à $\mathcal{T}_{h,4N}$ d'éléments \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^1 pour une complexité cible variant de $N = 2000$ à $N = 8000$, adaptés pour la métrique intersection.

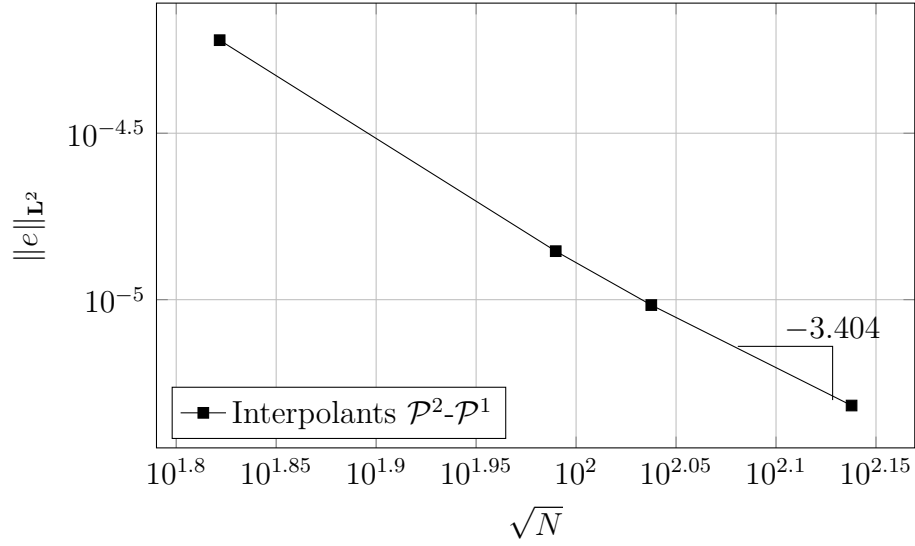


Figure 4.17 Erreur en norme \mathbf{L}^2 pour la marche descendante pour des maillages $\mathcal{P}^2\text{-}\mathcal{P}^1$

4.5 Adaptation sur un champ tridimensionnel

On montre finalement les résultats de l'adaptation sur des tétraèdres \mathcal{P}^2 , à l'aide d'un champ tridimensionnel $f_3(x, y, z) = x^4 y^4 z^4$ défini sur le cube $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Les isovaleurs de f_3 sont tracées sur la figure 4.18. On choisit d'adapter pour une complexité $N = 1000, 2000, 4000, 8000$ en minimisant toujours la norme \mathbf{L}^2 . Les maillages obtenus, figure 4.19, présentent généralement un nombre de sommets supérieur à la consigne, mais comme pour le premier exemple, le ratio N_{final}/N tend vers 1 lorsque N augmente.

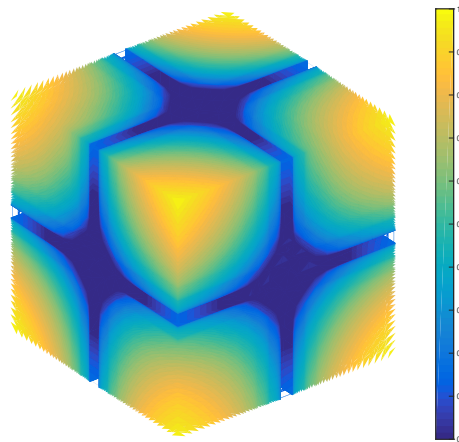
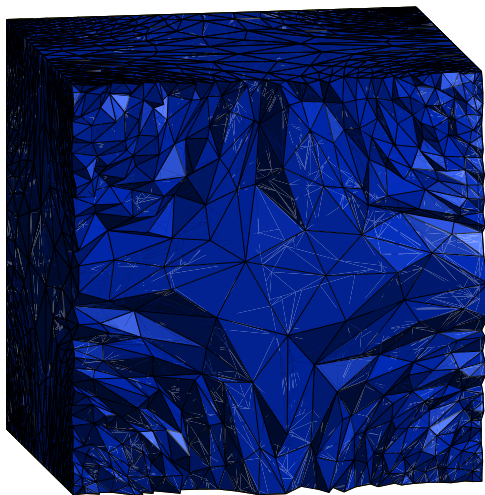
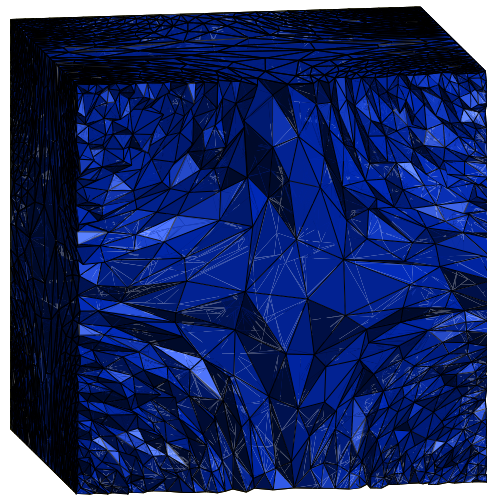


Figure 4.18 Isosurfaces de $f_3(x, y, z)$

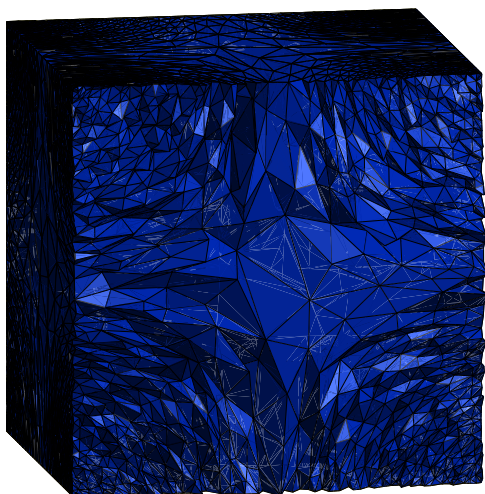
Les résultats de convergence en maillages sont donnés ci-dessous. On souligne la racine $\sqrt[3]{N}$ en abscisse.



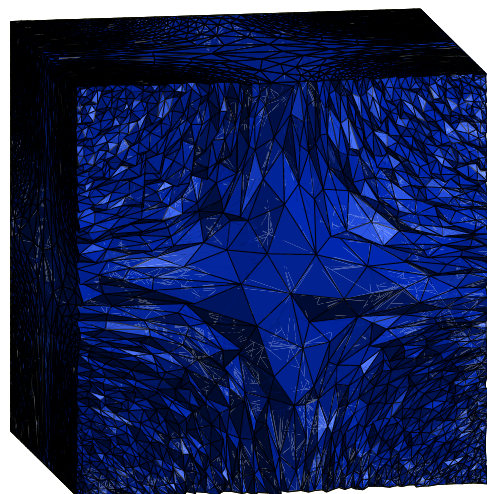
$$N = 3703$$



$$N = 6598$$



$$N = 11905$$



$$N = 21412$$

Figure 4.19 Maillages finaux $\mathcal{T}_{h,N}$ à $\mathcal{T}_{h,8N}$ de tétraèdres \mathcal{P}^2 pour la fonction $f_3(x, y, z)$. Coupe dans le plan $z = 0.8$. La complexité cible varie de 1000 à 8000.

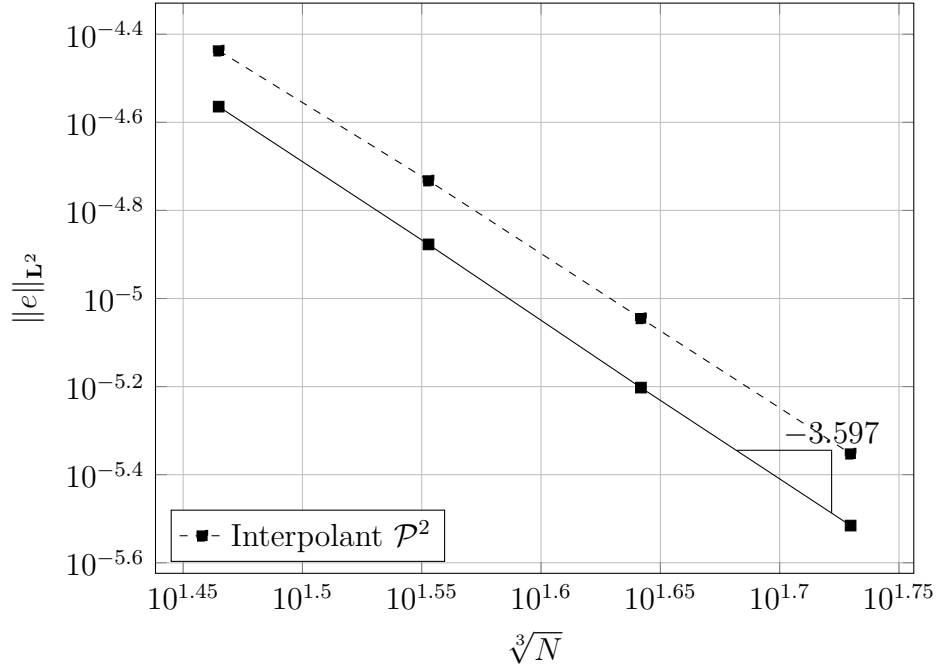


Figure 4.20 Erreur en norme L^2 pour la fonction $f_3(x, y, z)$. Comparaison entre l'erreur exacte (trait discontinu) et l'estimateur d'erreur (trait plein).

Remarque 8. Les taux de convergence indiqués sur les différents graphes sont obtenus en effectuant une régression linéaire sur les erreurs obtenues. Bien que la majorité des taux présentés se comparent bien avec le taux théorique $(k+1)$, certains sont plus élevés qu'escompté et ne reflètent pas complètement le comportement asymptotique du processus d'adaptation.

CHAPITRE 5 CONCLUSION

5.1 Synthèse des travaux

Au terme de ce travail, une méthodologie a été présentée pour l'adaptation anisotrope de maillages d'éléments d'ordre arbitraire. Le maillage final généré est une représentation discrète de l'unique maillage continu minimisant l'erreur d'interpolation, mesurée en norme \mathbf{L}^p , sur le domaine de calcul. L'obtention d'un minimum global est possible grâce à la théorie des métriques et maillages continus, qui offre un cadre formel dans lequel les opérations de calcul des variations sont bien posées. Cette théorie nécessite une modélisation de l'erreur d'interpolation, basée sur la reconstruction du tenseur des dérivées d'ordre $k + 1$ en chaque sommet du maillage. Une fois ce tenseur disponible, deux approches sont possibles pour mesurer l'anisotropie : l'évaluation des dérivées permet de calculer les coefficients d'un polynôme homogène, représentant l'erreur dans un voisinage du sommet considéré, que l'on majore par une forme quadratique associée à une métrique \mathcal{Q} . L'autre approche, qui n'a pas été explorée, est de diagonaliser le tenseur d'ordre élevé reconstruit, pour en extraire les directions principales d'erreur.

Pour déterminer la métrique \mathcal{Q} , la plus petite borne supérieure du polynôme d'erreur, la résolution d'un problème de minimisation est nécessaire. Ce problème est non linéaire, sous contraintes linéaires. Deux algorithmes ont été présentés pour obtenir \mathcal{Q} : le premier résout le problème d'optimisation non-linéaire par une méthode de type *brute force*, testant un grand nombre de métriques pour conserver la meilleure borne satisfaisant les contraintes. Cette méthode a été implémentée dans le programme EF et a permis de mener l'adaptation anisotrope en deux dimensions. Sa généralisation en trois dimensions est délicate, et rendrait le coût de l'adaptation prohibitif. Le second algorithme est applicable en 2D et 3D, et s'affranchit du caractère non linéaire du problème d'optimisation en considérant plutôt $\ln \mathcal{Q}$ comme matrice inconnue. Ce faisant, les contraintes initialement linéaires deviennent fortement non linéaires. En construisant astucieusement à la fois une suite de métriques (\mathcal{Q}_j) , et une suite de points de contraintes (\mathbf{x}_j) , il converge vers la matrice recherchée.

Enfin, un champ de métriques dites *optimales* est finalement calculé à partir du champ $(\mathcal{Q}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$: la résolution formelle d'un problème de minimisation de l'erreur d'interpolation sur Ω nous donne une métrique optimale pour un nombre de nœuds ciblé. Comme le montre la proposition 5, cette métrique optimale est une mise à l'échelle du champ initial. Cette expression pour \mathcal{M}_{opt} est une généralisation de la métrique basée sur la matrice hessienne, largement utilisée dans le cas d'interpolants linéaires. L'utilisation de ce cadre nous donne,

de plus, un ordre théorique de convergence en maillage, et l'utilisation des normes \mathbf{L}^p permet de contrôler le niveau de détails capturé par l'adaptation.

La procédure ainsi décrite a été appliquée à plusieurs exemples académiques, incluant des problèmes bi- et tridimensionnels, avec et sans solution exacte. Les maillages finaux présentent un caractère anisotrope prononcé et suivent les caractéristiques de la solution. Pour un niveau d'erreur donné, il est possible de générer un maillage anisotrope avec un nombre limité de degrés de liberté, là où les sommets d'un maillage isotrope serait plus nombreux d'au moins un ordre de grandeur. Dans le cas d'écoulements 2D, l'adaptation est menée soit indépendamment sur chaque variable, soit sur le problème global à l'aide de l'intersection de métriques. Pour les deux problèmes de CFD présentés, le maillage final est étiré dans le sens de l'écoulement, et présente des ratios d'anisotropie respectables. La présence de singularités dans les écoulements pose toujours certains problèmes, tant pour l'estimation d'erreur – les singularités dégradent l'ordre de convergence en maillages – que pour l'adaptation, puisqu'elles attirent un grand nombre de nœuds disponibles. Pour tous les exemples, les ordres de convergence théoriques, proposition 7, sont finalement obtenus, permettant ainsi de valider l'implémentation de la méthode de post-traitement dans EF.

5.2 Limitations de la solution proposée

Une première barrière dépend directement des algorithmes d'adaptation de maillages (MMG2/3D, etc.), qui sont majoritairement limités à l'adaptation de maillages de simplexes (triangles et tétraèdres). Néanmoins, le maillage de surfaces et volumes quelconques au moyen d'éléments quadrangulaires ou hexaédriques exclusivement étant toujours un problème ouvert, cette limitation fait l'objet d'une préoccupation mineure.

Ironiquement, dans le code EF, la méthode des éléments spectraux est actuellement limitée aux éléments quadrangulaires ou hexaédriques, alors que des fonctions d'interpolation de Lagrange \mathcal{P}^1 à \mathcal{P}^3 sont employées pour les triangles et tétraèdres. L'extension de la méthode spectrale aux éléments simpliciaux permettrait de vérifier la méthodologie pour des degrés arbitrairement élevés.

Enfin, les exemples présentés dans ce travail sont tous issus de simulations stationnaires : l'implémentation d'une fonction d'interpolation entre les maillages, en détectant les positions des nœuds dans les nouveaux éléments, ouvrirait la porte sur une large gamme de problèmes instationnaires particulièrement intéressants. Parallèlement à cela, des travaux récents d'Alauzet *et al.* [57] incluent le temps dans le problème d'optimisation, et dérivent un champ de métriques optimales $(\mathcal{M}(\mathbf{x}, t))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ à employer pour des problèmes transitoires.

5.3 Améliorations futures

Outre l'apport d'une solution aux deux dernières limitations mentionnées, deux autres pistes d'exploration sont également possibles. Comme mentionné en introduction, la construction de métriques est possible en s'appuyant non plus sur l'erreur d'interpolation, mais sur une fonctionnelle de la solution. Cette fonctionnelle est associée à une caractéristique particulière du problème (traînée ou portance d'un profil, solution moyenne, erreur sur un sous-domaine, etc.) sur laquelle une grande précision est requise. Quand il est question d'applications en mécanique des fluides ou aérodynamique, le contrôle de l'erreur d'approximation et l'intégration des équations aux dérivées partielles dans la méthode de post-traitement pourraient s'avérer être d'excellentes alternatives à la méthode multi-échelles utilisée ici.

La décomposition du tenseur des dérivées $\nabla^{k+1}u_h$, abordée à plusieurs reprises, est également une alternative intéressante aux algorithmes proposés dans la section 3.2, et permet d'extraire directement les directions principales. Comme mentionné, cette procédure est l'analogue au cas linéaire, où les directions principales sont obtenues à partir de la forme diagonalisée de la matrice hessienne $\nabla^2 u_h$. La description de cette décomposition, ainsi que les algorithmes associés, présentés dans les travaux de Mbinky [22] sont néanmoins limités à des champs analytiques, et ne montrent donc pas de résultats pour des problèmes physiques.

Finalement, une limitation importante provient de l'utilisation d'éléments rectilignes pour la construction des maillages. On observe en effet qu'un grand nombre d'éléments anisotropes droits est nécessaire pour suivre correctement la courbure de certaines solutions, voir par exemple la figure 4.6. Pourtant, le champ de tenseurs métriques fournit naturellement une information sur la courbure, exploitable en déterminant les arêtes optimales à l'aide de l'équation des géodésiques : la prochaine étape serait de considérer non plus des arêtes droites, mais les arêtes courbes formées par les géodésiques de l'espace riemannien considéré.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Loseille, *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2008.
- [2] P. Miron, J. Vétel, A. Garon, M. Delfour, and M. El Hassan, “Anisotropic mesh adaptation on lagrangian coherent structures,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, no. 19, pp. 6419–6437, 2012.
- [3] P. Miron, “Adaptation anisotrope sur des structures lagrangiennes cohérentes en mécanique des fluides,” Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2012.
- [4] S. Bélanger, “Adaptation de maillages anisotropes,” Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2010.
- [5] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz, “Adaptive remeshing for compressible flow computations,” *Journal of computational physics*, vol. 72, no. 2, pp. 449–466, 1987.
- [6] D. J. Mavriplis, “Adaptive mesh generation for viscous flows using triangulation,” *Journal of computational Physics*, vol. 90, no. 2, pp. 271–291, 1990.
- [7] M.-G. Vallet, *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. PhD thesis, Paris 6, 1992.
- [8] M. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau, “Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 25, no. 4, pp. 475–491, 1997.
- [9] D. Leservoisier, P.-L. George, and A. Dervieux, *Métrie continue et optimisation de maillage*. PhD thesis, INRIA, 2001.
- [10] T. Apel, *Anisotropic finite elements : local estimates and applications*, vol. 3. Citeseer, 1999.
- [11] L. Formaggia and S. Perotto, “New anisotropic a priori error estimates,” *Numerische Mathematik*, vol. 89, no. 4, pp. 641–667, 2001.
- [12] R. Löhner, “Three-dimensional fluid-structure interaction using a finite element solver and adaptive remeshing,” *Computing Systems in Engineering*, vol. 1, no. 2-4, pp. 257–272, 1990.

- [13] Y. Belhamadia, A. Fortin, and É. Chamberland, “Three-dimensional anisotropic mesh adaptation for phase change problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 201, no. 2, pp. 753–770, 2004.
- [14] C. Gruau and T. Coupez, “3d tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 48-49, pp. 4951–4976, 2005.
- [15] F. Alauzet, A. Loseille, A. Dervieux, and P. Frey, “Multi-dimensional continuous metric for mesh adaptation,” in *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*, pp. 191–214, Springer, 2006.
- [16] A. Loseille, “Galerie d’images - site web personnel.” <http://pages.saclay.inria.fr/adrien.loseille/index.php?page=gallery>.
- [17] W. Cao, “An interpolation error estimate in \mathcal{R}^2 based on the anisotropic measures of higher order derivatives,” *Mathematics of Computation*, vol. 77, no. 261, pp. 265–286, 2008.
- [18] W. Cao, “An interpolation error estimate on anisotropic meshes in \mathbb{R}^n and optimal metrics for mesh refinement,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 45, no. 6, pp. 2368–2391, 2007.
- [19] J.-M. Mirebeau, *Approximation adaptative et anisotrope par éléments finis Théorie et Algorithmes*. PhD thesis, Citeseer, 2010.
- [20] F. Hecht and R. Kuate, “An approximation of anisotropic metrics from higher order interpolation error for triangular mesh adaptation,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 258, pp. 99–115, 2014.
- [21] O. Coulaud and A. Loseille, “Very high order anisotropic metric-based mesh adaptation in 3d,” *Procedia engineering*, vol. 163, pp. 353–365, 2016.
- [22] E. Mbinky, *Adaptation de maillages pour des schémas numériques d’ordre très élevé*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2013.
- [23] P. Laug and H. Borouchaki, “Bl2d-v2 : mailleur bidimensionnel adaptatif,” *User Guide. INRIA, Rocquencourt*, 2003.
- [24] F. Hecht, “Bamg : bidimensional anisotropic mesh generator,” *User Guide. INRIA, Rocquencourt*, 1998.
- [25] C. Dobrzynski, *MMG3D : user guide*. PhD thesis, INRIA, 2012.
- [26] G. Compere, J.-F. Remacle, J. Jansson, and J. Hoffman, “A mesh adaptation framework for dealing with large deforming meshes,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 82, no. 7, pp. 843–867, 2010.

- [27] M. Ainsworth and J. T. Oden, *A posteriori error estimation in finite element analysis*, vol. 37. John Wiley & Sons, 2011.
- [28] M. Ainsworth and J. T. Oden, “A posteriori error estimators for second order elliptic systems part 2. an optimal order process for calculating self-equilibrating fluxes,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 26, no. 9, pp. 75–87, 1993.
- [29] P. Ladeveze and D. Leguillon, “Error estimate procedure in the finite element method and applications,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 20, no. 3, pp. 485–509, 1983.
- [30] J. T. Oden and S. Prudhomme, “Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 41, no. 5-6, pp. 735–756, 2001.
- [31] I. Mozolevski and S. Prudhomme, “Goal-oriented error estimation based on equilibrated-flux reconstruction for finite element approximations of elliptic problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 288, pp. 127–145, 2015.
- [32] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, “A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 24, no. 2, pp. 337–357, 1987.
- [33] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, no. 7, pp. 1331–1364, 1992.
- [34] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2 : Error estimates and adaptivity,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, no. 7, pp. 1365–1382, 1992.
- [35] A. Naga and Z. Zhang, “A posteriori error estimates based on the polynomial preserving recovery,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 42, no. 4, pp. 1780–1800, 2004.
- [36] S. Brenner and R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, vol. 15. Springer Science & Business Media, 2007.
- [37] P. G. Ciarlet, “The finite element method for elliptic problems,” *Classics in applied mathematics*, vol. 40, pp. 1–511, 2002.
- [38] A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, vol. 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [39] A. T. Patera, “A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion,” *Journal of computational Physics*, vol. 54, no. 3, pp. 468–488, 1984.

- [40] C. Pozrikidis, *Introduction to finite and spectral element methods using MATLAB*. CRC Press, 2005.
- [41] T. Raux, “Étude de conditions limites de sortie pour la méthode des éléments finis,” Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2017.
- [42] A. Moulin, “Simulation numérique par la méthode des éléments spectraux des vibrations induites par relâcher tourbillonnaire,” Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2016.
- [43] M. Wasselet, “Calcul des forces et moments sur des corps immergés par la méthode des éléments spectraux,” Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2016.
- [44] E. S. Fedorov, “The symmetry of regular systems of figures,” *Zap. Mineralog. Obsc.(2)*, vol. 28, no. 1-146, p. 28, 1891.
- [45] D. Sommerville, “Space-filling tetrahedra in euclidean space,” *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 41, pp. 49–57, 1922.
- [46] P. J. Frey and P.-L. George, *Maillages : applications aux éléments finis*. Hermès Science Publications, 1999.
- [47] J.-M. Arnaudiès and J. Lelong-Ferrand, *Algèbre*. Dunod, 1974.
- [48] J. L. W. V. Jensen, “Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes,” *Acta mathematica*, vol. 30, no. 1, pp. 175–193, 1906.
- [49] R. Wunderling, “Soplex : The sequential object-oriented simplex class library,” 1997.
- [50] G. B. Dantzig and M. N. Thapa, *Linear programming 2 : theory and extensions*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [51] R. Herbin, “Cours d’analyse numérique - université aix marseille.” <https://old.i2m.univ-amu.fr/~gallouet/licence.d/anum.d/anum-tg5.pdf>.
- [52] Z. Zhang and A. Naga, “A new finite element gradient recovery method : superconvergence property,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 26, no. 4, pp. 1192–1213, 2005.
- [53] P. Labbé and A. Garon, “A robust implementation of zienkiewicz and zhu’s local patch recovery method,” *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 11, no. 5, pp. 427–434, 1995.
- [54] M.-G. Vallet, C.-M. Manole, J. Dompierre, S. Dufour, and F. Guibault, “Numerical comparison of some hessian recovery techniques,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 72, no. 8, pp. 987–1007, 2007.
- [55] J. Xu and Z. Zhang, “Analysis of recovery type a posteriori error estimators for mildly structured grids,” *Mathematics of Computation*, vol. 73, no. 247, pp. 1139–1152, 2004.

- [56] H. Guo, Z. Zhang, and R. Zhao, “Hessian recovery for finite element methods,” *Mathematics of Computation*, vol. 86, no. 306, pp. 1671–1692, 2017.
- [57] N. Barral, G. Olivier, and F. Alauzet, “Time-accurate anisotropic mesh adaptation for three-dimensional time-dependent problems with body-fitted moving geometries,” *Journal of Computational Physics*, vol. 331, pp. 157–187, 2017.

ANNEXE A PREUVE DE LA PROPOSITION 4

On donne une esquisse de preuve dans le cas général en dimension n . Cette démonstration est adaptée de la preuve pour le cas linéaire donnée dans Alauzet & Loseille [15], que l'on consultera pour plus de détails. On cherche à majorer l'expression quadratique de l'erreur dans le voisinage d'un sommet \mathbf{a} du maillage, soit dans sa boule de rayon h :

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}_h(\mathbf{a})} \left(\mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x} \right)^{\frac{k+1}{2}}.$$

Comme l'exposant est positif et ≥ 1 , il suffit de majorer la forme quadratique entre parenthèses. On note les $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ les vecteurs propres de \mathcal{M} et $(h_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, h_n^{-\frac{1}{2}})$ ses valeurs propres. On veut faire apparaître les longueurs h_i le long des directions principales de la matrice \mathcal{M} inconnue : on exprime donc un vecteur $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_h(\mathbf{a}) \subset \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})^1$ comme $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mu_i h_i \mathbf{v}_i$. La longueur de chaque composante de \mathbf{x} selon les vecteurs de la base propre est donc $\mu_i h_i$, et on a la contrainte $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \geq 1$ pour être inclus dans la boule unité.

On note maintenant $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ et (q_1, \dots, q_n) les vecteurs et valeurs propres de \mathcal{Q} . Dans la base propre de \mathcal{Q} , les nouvelles composantes \bar{x}_j du vecteur x s'expriment comme les projections sur les vecteurs \mathbf{q}_j :

$$\bar{x}_j = \left\langle \sum_{i=1}^n \mu_i h_i \mathbf{v}_i, \mathbf{q}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i h_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{q}_j \rangle$$

et la forme quadratique s'écrit alors

$$\mathbf{x}^T \mathcal{Q} \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^T \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{q}_n \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \mu_i h_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{q}_j \rangle \right)^2 q_j. \quad (\text{A.1})$$

En utilisant les notations $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ et $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$, on peut réécrire l'erreur sous la forme matricielle (A.2). La matrice P est la matrice de changement de base entre la base propre de \mathcal{M} et celle de \mathcal{Q} , et est définie par $P_{ij} = \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{v}_j \rangle$.

$$\max_{\|\boldsymbol{\mu}\| \leq 1} (H P \boldsymbol{\mu})^T Q H P \boldsymbol{\mu} \quad (\text{A.2})$$

Un développement algébrique de (A.1) et de (A.2) permet de se convaincre de l'équivalence.

1. On considère un maillage unité pour la métrique \mathcal{M} à déterminer : la boule discrète $\mathcal{B}_h(\mathbf{a})$ de rayon h est donc une représentation de la boule unité continue $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{a})$.

Comme la matrice de changement de base préserve la norme, on considère finalement le changement de variable après rotation $\bar{\boldsymbol{\mu}} = P\boldsymbol{\mu}$. Puisque Q est une matrice diagonale, le produit matriciel s'écrit alors comme une somme, équation (A.3).

$$\max_{\|\bar{\boldsymbol{\mu}}\| \leq 1} (H\bar{\boldsymbol{\mu}})^T Q H\bar{\boldsymbol{\mu}} = \max_{\|\bar{\boldsymbol{\mu}}\| \leq 1} \sum_{i=1}^n h_i^2 \bar{\mu}_i^2 q_i \quad (\text{A.3})$$

Une majoration rapide de (A.3) permet finalement de montrer que le maximum est atteint pour $\|\bar{\boldsymbol{\mu}}\| = 1$; une analyse des conditions d'optimalité permet de conclure en montrant que les directions principales de \mathcal{M} sont celles de la matrice \mathcal{Q} . Comme on a $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ dans la base propre, l'expression de l'erreur s'écrit bien comme la trace d'une matrice $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$:

$$e_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}) = \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 q_i \right)^{\frac{k+1}{2}} = \left(\text{trace} \left(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \right) \right)^{\frac{k+1}{2}}$$